

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 32

Натуральное исчисление предикатов:
полнота

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Лемма о сведении ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *утверждению о совмещении выводов* и *определению доказательства*,
достаточно обосновать три факта:

1. Для каждой аксиомы ψ ГИП
секвенция $\vdash \psi$ доказуема НИП
2. Если формула χ выводится из ψ_1, ψ_2 по правилу R_{mp} в ГИП,
то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ в НИП
3. Если формула χ выводится из ψ по правилу R_g в ГИП,
то секвенция $\vdash \chi$ выводима из $\vdash \psi$ в НИП

Лемма о сведении ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

1. Подробно докажем в НИП только аксиомы ГИП вида

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

(доказательства для остальных аксиом не более трудны):

\mathcal{A} :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash A \vee B$
\mathcal{A} :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, A \vdash A$
\mathcal{A} :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, A \vdash A \rightarrow C$
R_{\rightarrow}^- :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, A \vdash C$
\mathcal{A} :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, B \vdash B$
\mathcal{A} :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, B \vdash B \rightarrow C$
R_{\rightarrow}^- :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, B \vdash C$
R_{\vee}^- :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \vdash C$
R_{\rightarrow}^+ :	$A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash A \vee B \rightarrow C$
R_{\rightarrow}^+ :	$A \rightarrow C \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$
R_{\rightarrow}^+ :	$\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

Лемма о сведении ГИП к НИП

Если формула φ доказуема в ГИП,
то секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

2. Положим, что формула χ выводится из ψ_1 и ψ_2 по правилу R_{mp}

Тогда $\psi_2 = \psi_1 \rightarrow \chi$,

и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\{\vdash \psi_1, \vdash \psi_2\}$ устроен очень просто:

$$R_{\rightarrow}^-: \begin{array}{l} \vdash \psi_1 \\ \vdash \psi_1 \rightarrow \chi \\ \vdash \chi \end{array}$$

3. Положим, что формула χ выводится из ψ по правилу R_g

Тогда $\chi = \forall x \psi$,

и вывод секвенции $\vdash \chi$ из $\vdash \psi$ устроен очень просто:

$$R_{\forall}^+: \begin{array}{l} \vdash \psi \\ \vdash \forall x \psi \quad \blacktriangledown \end{array}$$

Теорема о полноте НИП

Для любой общезначимой формулы φ логики предикатов секвенция $\vdash \varphi$ доказуема в НИП

Доказательство.

По *теореме Гёделя о полноте*,
существует доказательство (общезначимой) формулы φ в ГИП

По *лемме о сведении ГИП к НИП*,
существует доказательство секвенции $\vdash \varphi$ в НИП ▼

Следствие(проверка логического следования в НИП)

Для любого множества предложений Γ и любого предложения φ секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема в НИП тогда и только тогда, когда верно соотношение $\Gamma \models \varphi$

Теорема о полноте НИП

Доказательство (следствия).

$\Gamma \models \varphi$

\Rightarrow (теорема компактности Мальцева)

Существует конечное подмножество $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ множества Γ ,
такое что $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$

\Rightarrow (теорема о логическом следствии)

$\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$

\Rightarrow (теорема о равносильной замене и законы булевой алгебры)

$\models \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots))$

\Rightarrow (полнота исчисления)

Секвенция $\vdash \psi_1 \rightarrow (\psi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\psi_n \rightarrow \varphi) \dots))$ доказуема

\Rightarrow (правило монотонности и правило отделения)

Секвенция $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n \vdash \varphi$ доказуема

\Rightarrow (правило монотонности)

Секвенция $\Gamma \vdash \varphi$ доказуема

Доказательство в обратную сторону аналогично ▼