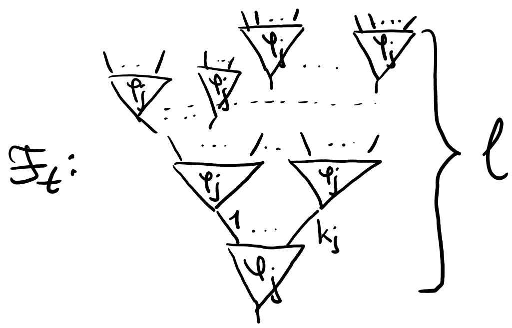
Курс «Элементы теории дискретных управляющих систем» (ВМК МГУ, 3 курс, 318 гр. — кафедра МК).

Семинар №1

I. Содержательный смысл приведённых параметров элементов базиса

Определение параметров базиса $\text{Б} = \{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{b}$, где базисная ФАЛ $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ имеет положительный вес L_i и существенно зависит от всех своих БП, если $k_i \geqslant 2$: а) для классов $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{Ф}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ — T_i, ρ_i, τ_i, $\rho_{\text{Б}}$, $\tau_{\text{Б}}$; б) для классов $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$ и $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$ — σ_i, $\pi_{\text{Б}}$, $\hat{\rho}_{\text{Б}}$ (см. §1 методических материалов).

Содержательный смысл приведённых параметров связан с задачей построения схем с одним выходом и максимально возможным числом «эффективных» входов при заданных ограничениях на их сложность (задержку). Такие формулы и СФЭ с ограниченной сложностью (задержкой) целесообразно строить, в основном, из ФЭ $\mathcal{E}_j$, для которых $\rho_j = \rho_{\text{Б}}$ (соответственно $\tau_j = \tau_{\text{Б}}$), в виде квазиполного (соответственно полного) l-ярусного дерева $\mathcal{F}_t$, содержащего t таких ФЭ:

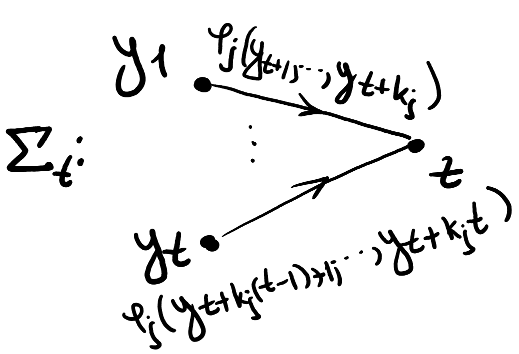


$$L(\mathcal{F}_t) = t, \quad \mathcal{L}(\mathcal{F}_t) = L_j \cdot t, \quad R(\mathcal{F}_t) = t(k_j - 1) + 1, \quad l = \left\lceil \log_{k_j} R \right\rceil.$$

При этом

$$\frac{\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)}{R(\mathcal{F}_t)} = \frac{L_j \cdot t}{t(k_j - 1) + 1} = \frac{L_j}{k_j - 1 + 1/t} \xrightarrow{t \to \infty} \rho_{\text{Б}}.$$

Аналогичные КС (соответственно ИКС) строятся из t контактов типа $\mathcal{K}_j$, для которых $L_j = \pi_{\text{Б}}$ (соответственно $\hat{\rho}_j = L_j/(k_j + 1) = \hat{\rho}_{\text{Б}}$), соединённых в звезду Σ_t вида:



Тогда 1) в случае $\Sigma_t \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{К}}$

$$R(\Sigma_t) = t, \quad \mathcal{L}(\Sigma_t) = t \cdot L_j = t \cdot \pi_{\text{Б}} \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{\mathcal{L}(\Sigma_t)}{R(\Sigma_t)} = \pi_{\text{Б}};$$

2) в случае $\Sigma_t \in \mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{ИКС}}$

$$R(\Sigma_t) = (k_j + 1) \cdot t, \quad \mathcal{L}(\Sigma_t) = L_j \cdot t, \quad \text{и, следовательно,} \quad \frac{\mathcal{L}(\Sigma_t)}{R(\Sigma_t)} = \hat{\rho}_{\text{Б}}.$$

Задача №1

Построить СФЭ с наименьшей сложностью (задержкой), имеющую 15 существенных и «эффективных» входов, в базисе $Б = Б_0 \cup \mathcal{E}_H$, где $\mathcal{E}_H = \langle H(x_1, x_2, x_3), \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$.

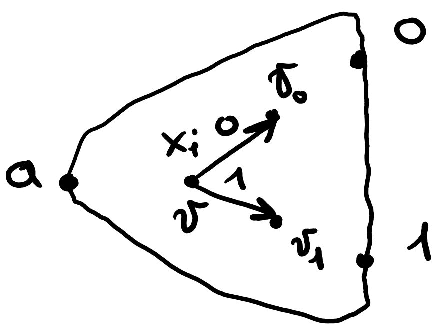
Задача для самостоятельного решения №1

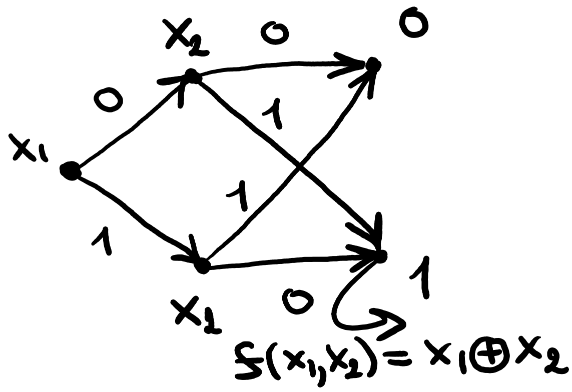
Построить аналогичные КС и ИКС в Б.

II. Верхние оценки числа схем в заданном классе и нижние мощностные оценки соответствующих функций Шеннона

Рассмотрим некоторые модификации или частные случаи основных классов схем.

Класс $\mathcal{U}^{\mathrm{BDD}}$ двоичных решающих диаграмм, т. е. ориентированных ациклических графов с 1 истоком — входом и 2 стоками — выходами, каждая вершина которых отличная от стоков помечена одной из БП $X(n)$, а две исходящих из неё дуги — символами 0 и 1, причём символами 0 и 1 помечены также стоки схемы.





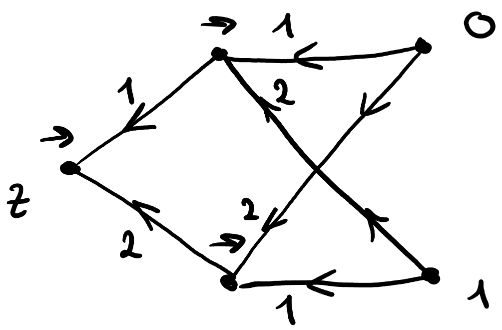
Для BDD $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ её сложность $\mathcal{L}(\Sigma)$ — число отличных от стоков вершин, а $L(\Sigma)$ — число её рёбер (дуг).

Задача №2

Доказать, что $||\mathcal{U}^{\mathrm{BDD}} \langle \mathcal{L}, n \rangle || \leqslant (4n(\mathcal{L} + 2))^{\mathcal{L}+1}$.

Решение:

Пусть $\Sigma \in \mathcal{U}^{\mathrm{BDD}} \langle \mathcal{L}, n \rangle$, т. е. $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathcal{L}(\Sigma) \leqslant \mathcal{L}$. Сопоставим Σ СФЭ $\mathcal{S}$ в базисе $Б' = \{x_1 \to x_2, 0, 1\}$, входами которой сопоставлены 0 и 1 (выходы BDD), каждый отличный от 0 и 1 вершин BDD сопоставлен ФЭ $\to$, ориентация дуг заменена на противоположную, а пометки этих дуг увеличены на 1.



Заметим, что $|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{Б'}(L, n)| \leqslant (4(L+n))^{L+1}$ и что аналогично этой оценке получается оценка $|\mathcal{U}^{\mathrm{BDD}} \langle \mathcal{L}, n \rangle | \leqslant (4n)^{\mathcal{L}}(\mathcal{L} + 2)^{\mathcal{L}+1} \leqslant (4n(\mathcal{L} + 2))^{\mathcal{L}+1}$.

Задача №3

Доказать, что $\mathcal{L}^{\mathrm{BDD}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$.

Решение:

1. Воспользоваться мощностным неравенством и его решением на основе утв. 3.1. 2. Воспользоваться тем, что в курсе Основы кибернетики из неравенства $||\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L,n)|| \leqslant (8nL)^L$ было выведено соотношение $L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}$, а также тем, что $|\mathcal{U}^{\mathrm{BDD}}\langle \mathcal{L}, n\rangle| \leqslant (4n(\mathcal{L}+2))^{\mathcal{L}+2}$, из которого таким образом, вытекает, что $\mathcal{L}^{\mathrm{BDD}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n} + 2 \sim \frac{2^n}{n}$.

Задача №4

Рассматривается базис $\text{Б}_0' = \{y_1 \& y_2, \overline{y}_1\}$ и класс $\widetilde{\mathcal{U}}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}$, состоящий из всех формул на $\text{Б}_0'$ на входы которых могут поступать (с весом 0) попарные конъюнкции $x_i x_j$. Доказать, что $||\widetilde{\mathcal{U}}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}(L,n)|| \leqslant (5n^2)^{L+1}$ и вывести из неё оценку $\widetilde{L}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}(L,n) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{\log n}$.

Решение:

1. Заметим, что $||\widetilde{\mathcal{U}}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}(L,n)|| \leqslant |\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}\left(L, \frac{n(n-1)}{2} + n\right)|$. 2. Воспользуемся решением мощностного неравенства $||\widetilde{\mathcal{U}}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}(L,n)|| \geqslant 2^{2^n}$ с помощью утв. 3.1.

Задача для самостоятельного решения №2

Получить аналогичные результаты для класса $\widehat{\mathcal{U}}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}$, допускающего появление на входах формул из $\mathcal{U}^{\Phi}_{\text{Б}_0'}$ линейных функций, зависящих существенно не более, чем от 3 БП из $X(n)$.

Задача для самостоятельного решения №3*

Получить НМО функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из $P_2(n)$ бинарными программами, состоящими из вычислительных команд Б_0 и команд перехода по значениям БП, записанными в ЯП.