

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 20

Алгоритм унификации атомарных формул

Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

## Напоминание: задача унификации

Для заданных выражений  $E_1, E_2$  логики предикатов  
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,  
и если это так, то вычислить  
множество унификаторов, полное в  $\mathcal{U}(E_1, E_2)$

---

Чтобы освоить метод резолюций, достаточно  
научиться решать эту задачу для произвольной пары **атомов**

# Переход от атомов к системам уравнений

## Утверждение

Никакая пара атомов  $P(t_1, \dots, t_k)$ ,  $Q(s_1, \dots, s_m)$   
с различными предикатными символами  $P^{(k)}$ ,  $Q^{(m)}$   
не унифицируема

## Доказательство

Пусть  $P(\tilde{t}^k)\theta = P(\tilde{t}'^k)$  и  $Q(\tilde{s}^m)\theta = Q(\tilde{s}'^m)$

Т.к.  $P \neq Q$ , верно и  $P(\tilde{t}'^k) \neq Q(\tilde{s}'^m)$  ▼

Далее рассматривается только унификация атомов,  
содержащих одинаковые предикатные символы

# Переход от атомов к системам уравнений

Унификация атомов  $P(t_1, \dots, t_k), P(s_1, \dots, s_k)$

$\Leftrightarrow$

Вычисление подстановки  $\theta$ , такой что  $t_1\theta = s_1\theta, \dots, t_k\theta = s_k\theta$

$\Leftrightarrow$

Вычисление подстановки  $\theta$ , такой что левая и правая части каждого уравнения в системе  $\mathcal{E}$  вида

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении  $\theta$

$\Leftrightarrow$

Вычисление **решения системы уравнений**  $\mathcal{E}$   
в **свободной**<sup>1</sup> **алгебре термов**<sup>2</sup>

---

1 Значение терма — это сам терм,

то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

2 **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

# Системы уравнений над термами

Знак равенства в системах уравнений будем записывать так:  $\equiv$  — чтобы отличать такое равенство от посимвольного совпадения выражений

**Системой уравнений** (в свободной алгебре термов) будем называть запись  $\mathcal{E}$  вида

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 \equiv s_1 \\ \dots \\ t_k \equiv s_k \end{array} \right.,$$

где  $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k$  — термы

Подстановка  $\theta$  — **унификатор** (решение) системы  $\mathcal{E}$ , если для каждого  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , верно  $t_i\theta = s_i\theta$

$\mathcal{U}(\mathcal{E})$  — множество всех унификаторов системы уравнений  $\mathcal{E}$

Система уравнений  $\mathcal{E}$  **унифицируема** (имеет решение), если  $\mathcal{U}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

**НОУ**( $\mathcal{E}$ ) — множество всех **наиболее общих** унификаторов системы уравнений  $\mathcal{E}$

# Системы уравнений над термами

## Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f(c, x)} \equiv \mathbf{f(y, g(y))} \\ \mathbf{g(y)} \equiv \mathbf{z} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f(c, g(c))} \equiv \mathbf{f(c, g(c))} \\ \mathbf{g(c)} \equiv \mathbf{g(c)} \end{cases}$$

$\theta = \{x/\mathbf{g(c)}, y/\mathbf{c}, z/\mathbf{g(c)}\}$  — унификатор системы  $\mathcal{E}$   
(и на самом деле даже **наиболее общий**)

А система  $\begin{cases} \mathbf{f(c, y)} \equiv \mathbf{f(y, g(y))} \\ \mathbf{g(y)} \equiv \mathbf{z} \end{cases}$  не унифицируема

# Системы уравнений над термами

**Утверждение.** Множества унификаторов любой пары атомов

$$P(t_1, \dots, t_k), P(s_1, \dots, s_k)$$

и системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 \equiv s_1 \\ \dots \\ t_k \equiv s_k \end{cases}$$

совпадают

**Доказательство.** Очевидным образом следует из определений унификатора атомов и унификатора системы ▼

# Унификация переменной и терма

**Лемма (о связке).** Для любых переменной  $x$  и терма  $t$  верно:

1. Если  $x = t$ , то  $\varepsilon \in \text{НОУ}(x, t)$
2. Если  $x \notin \text{Var}_t$ , то  $\{x/t\} \in \text{НОУ}(x, t)$
3. Если  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$ , то  $\mathbf{У}(x, t) = \emptyset$

**Доказательство**

1. Следует из того, что  $x\varepsilon = x$  и для любой подстановки  $\eta$  верно  $\eta = \varepsilon\eta$

2. Достаточно показать, что если  $x \notin \text{Var}_t$ , то:

- a)  $\{x/t\}$  — унификатор (переменной  $x$  и терма  $t$ )
- б) для любого унификатора  $\theta$  существует подстановка  $\eta$ , такая что

$$\theta = \{x/t\}\eta$$

a) Следует из равенств  $x\{x/t\} = t = t\{x/t\}$



# Унификация переменной и терма

**Лемма (о связке).** Для любых переменной  $x$  и терма  $t$  верно:

1. Если  $x = t$ , то  $\varepsilon \in \text{НОУ}(x, t)$
2. Если  $x \notin \text{Var}_t$ , то  $\{x/t\} \in \text{НОУ}(x, t)$
3. Если  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$ , то  $\mathbf{У}(x, t) = \emptyset$

Доказательство

$$26) x \notin \text{Var}_t \quad \text{и} \quad x\theta = t\theta \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \exists \eta \quad \theta = \{x/t\}\eta$$

Достаточно показать, что  $\theta = \{x/t\}\theta$

Для этого рассмотрим произвольную переменную  $y$  и покажем, что  $y\theta = y\{x/t\}\theta$ :

- ▶ Если  $y = x$ , то  $y\theta = x\theta = t\theta = x\{x/t\}\theta = y\{x/t\}\theta$
- ▶ Иначе  $y \neq x$ , и  $y\theta = y\{x/t\}\theta$

Следовательно, для любой переменной  $y$  верно равенство  $y\theta = y\{x/t\}\theta$ , а значит, верно и  $\theta = \{x/t\}\theta$

# Унификация переменной и терма

**Лемма (о связке).** Для любых переменной  $x$  и терма  $t$  верно:

1. Если  $x = t$ , то  $\varepsilon \in \text{НОУ}(x, t)$
2. Если  $x \notin \text{Var}_t$ , то  $\{x/t\} \in \text{НОУ}(x, t)$
3. Если  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$ , то  $\mathbf{У}(x, t) = \emptyset$

Доказательство

3. Рассмотрим произвольную подстановку  $\theta$  и покажем, что если  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$ , то  $\theta$  не может являться унификатором  $x$  и  $t$

Пусть  $x\theta = s$

Тогда  $|x\theta| = |s| < |t\{x/s\}| \leq |t\theta|$  ( $|p|$  — длина терма  $p$ )

Следовательно,  $|x\theta| < |t\theta|$ , а значит,  $x\theta \neq t\theta$  ▼

# Унификация приведённой системы

Система уравнений является **приведённой**, если она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \dots \\ x_k = t_k \end{cases},$$

где  $x_1, \dots, x_k$  — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений

## Пример

$$\begin{cases} x = \mathbf{f}(y, \mathbf{g}(y)) \\ z = w \\ u = \mathbf{g}(c) \end{cases} \quad \text{— приведённая система}$$

# Унификация приведённой системы

Система уравнений является **приведённой**, если она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \dots \\ x_k = t_k \end{cases},$$

где  $x_1, \dots, x_k$  — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений

## Пример

$$\begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ x = w \\ y = g(c, c) \\ g(z) = f(c, x) \end{cases} \quad \text{— неприведённая система:}$$

1.  $g(z)$  стоит в левой части уравнения, и это не переменная
2.  $x$  встречается в левых частях два раза
3.  $y$  встречается и в левой, и в правой частях

# Унификация приведённой системы

Система уравнений является **приведённой**, если она имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \dots \\ x_k = t_k \end{cases},$$

где  $x_1, \dots, x_k$  — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений

## Лемма (о приведённой системе)

Если  $\mathcal{E} = \begin{cases} x_1 = t_1 \\ \dots \\ x_k = t_k \end{cases}$  — приведённая система, то

$\{x_1/t_1, \dots, x_k/t_k\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

**Доказательство.** Следует из **леммы о связке** ▼

# Унификация произвольной системы

Алгоритм, о котором будет дальше идти речь, коротко описывается так: это **метод исключения переменных**, широко применяющийся для решения **систем линейных алгебраических уравнений** и адаптированный к свободной алгебре термов

**Напоминание**, как работает этот метод для уравнений над действительными числами:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - z + y \\ 2y + 3z = x + 2 \end{array} \right. & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - z + y \\ 2y + 3z = 3 - z + y + 2 \end{array} \right. \quad \longmapsto \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - z + y \\ y = 5 - 4z \end{array} \right. \\ & & \downarrow \\ \text{решения очевидны} \text{ -----} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 8 - 5z \\ y = 5 - 4z \end{array} \right. \quad \longleftarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - z + 5 - 4z \\ y = 5 - 4z \end{array} \right. \end{array}$$

В свободной алгебре термов вместо спектра арифметических операций содержится только одна операция композиции, но это не мешает адаптировать метод без особых усилий

# Унификация произвольной системы

## Алгоритм унификации (2):<sup>1</sup>

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила **произвольно (недетерминированно)** применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- ▶ получена приведённая система уравнений
  - ▶ ответ: унификатор из **леммы о приведённой системе**
- ▶ **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ▶ ответ: **СТОП: система не унифицируема**

---

<sup>1</sup> Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

# Унификация произвольной системы

## Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы:

( $x \in \text{Var}$ ,  $t \in \text{Term}$ )

**Triv:** удалить  $t = t$

**Swap:** заменить  $t = x$  на  $x = t$ , если  $t \notin \text{Var}$

**Func:** заменить  $\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) = \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k)$  на 
$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

**Elim:** если в системе содержится уравнение  $Eq : x = t$ , где

▶  $x \notin \text{Var}_t$  и

▶  $x$  встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку  $\{x/t\}$  ко всем уравнениям системы, кроме  $Eq$



# Унификация произвольной системы

## Правила преобразования системы уравнений

*Явная неунифицируемость:*

$(x \in \text{Var}, t \in \text{Term})$

**NElim:** если в системе содержится уравнение  $x \doteq t$ ,  
где  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$ , то  
СТОП: система неунифицируема

**NFunc:** если в системе содержится уравнение  
 $\mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) \doteq \mathbf{g}(s_1, \dots, s_m)$ , где  $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$ , то  
СТОП: система неунифицируема

# Унификация произвольной системы

## Примеры

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f(x, g(y))} \equiv \mathbf{f(g(y), x)} \\ \mathbf{c} \equiv \mathbf{y} \end{array} \right. & \xrightarrow{\text{Func}} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \equiv \mathbf{g(y)} \\ \mathbf{g(y)} \equiv \mathbf{x} \\ \mathbf{c} \equiv \mathbf{y} \end{array} \right. \\ & & \text{Swap} \downarrow \\ & & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \equiv \mathbf{g(c)} \\ \mathbf{g(c)} \equiv \mathbf{g(c)} \\ \mathbf{y} \equiv \mathbf{c} \end{array} \right. \xleftarrow{\text{Elim } \times 2} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \equiv \mathbf{g(y)} \\ \mathbf{g(y)} \equiv \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \equiv \mathbf{c} \end{array} \right. \\ & & \text{Triv} \downarrow \\ & & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \equiv \mathbf{g(c)} \\ \mathbf{y} \equiv \mathbf{c} \end{array} \right. \leftarrow \text{приведённая система} \end{array}$$

Ответ:  $\{x/g(c), y/c\} \in \text{НОУ}(\mathcal{E})$

# Унификация произвольной системы

## Примеры

$$\mathcal{E}' = \begin{cases} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(x)) \equiv \mathbf{h}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} \equiv y \end{cases} \xrightarrow{\text{NFunc}} \text{СТОП}$$

Ответ:  $\mathcal{U}(\mathcal{E}') = \emptyset$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'' = \begin{cases} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(x)) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} \equiv y \end{cases} & \xrightarrow{\text{Func}} & \begin{cases} x \equiv \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(x) \equiv x \\ \mathbf{c} \equiv y \end{cases} \\ & & \text{Swap} \downarrow \\ & & \begin{cases} x \equiv \mathbf{g}(y) \\ x \equiv \mathbf{g}(x) \\ \mathbf{c} \equiv y \end{cases} \\ \text{СТОП} & \xleftarrow{\text{NElim}} & \end{array}$$

Ответ:  $\mathcal{U}(\mathcal{E}'') = \emptyset$

# Унификация произвольной системы

**Теорема (об унификации).** Для любой системы уравнений  $\mathcal{E}_0$

- ▶ алгоритм  $\mathcal{A}$  завершает работу на  $\mathcal{E}_0$  (завершаемость)
- ▶ по завершении алгоритмом  $\mathcal{A}$  выдаётся подстановка или сообщение **СТОП** (успешность)
- ▶ если выдана подстановка  $\theta$ , то  $\theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}_0)$  (корректность)
- ▶ если выдано сообщение **СТОП**, то система  $\mathcal{E}$  не унифицируема (полнота)

**Следствие.** Для любых атомов  $A$  и  $B$  логики предикатов верно:

$$\mathcal{U}(A, B) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОУ}(A, B) \neq \emptyset$$

# Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ( $\mathcal{E}_0 \not\rightarrow \infty$ )

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- ▶ на каждом шаге работы алгоритма система становится проще
- ▶ после конечного числа шагов работы алгоритма обязательно получается система, которую нельзя упростить

Предложим характеристику системы, которая убывает на каждом шаге и при этом не может убывать бесконечно долго

Завершаемость алгоритма

очевидным образом следует из существования такой характеристики:

**если система упрощается на каждом шаге  
и не может упрощаться бесконечно,  
то число шагов конечно**

# Доказательство теоремы об унификации

**Завершаемость** ( $\mathcal{E}_0 \not\rightarrow \infty$ )

Переменную  $x$  назовём **приведённой** в системе  $\mathcal{E}$ , если  $\mathcal{E}$

- ▶ содержит уравнение вида  $x = t$ , где  $x \notin \text{Var}_t$ , и
- ▶ не содержит  $x$  в других уравнениях

**Характеристикой** системы  $\mathcal{E}$  объявим упорядоченную тройку чисел

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$ , где

- ▶  $vr(\mathcal{E})$  — число неприведённых переменных системы  $\mathcal{E}$
- ▶  $fs(\mathcal{E})$  — суммарное число функциональных символов и констант в левых частях уравнений  $\mathcal{E}$
- ▶  $eq(\mathcal{E})$  — число уравнений системы  $\mathcal{E}$

**Лексикографический порядок** на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3 \rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3 \rangle \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1, n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1, n_2 = m_2, n_3 > m_3 \end{cases}$$

**Пример:**  $\langle 2, 11, 2 \rangle \succ \langle 2, 10, 5578 \rangle \succ \langle 2, 10, 5577 \rangle \succ \langle 1, 1001, 78 \rangle$

# Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ( $\mathcal{E}_0 \not\rightarrow \infty$ )

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$

$vr(\mathcal{E})$ : число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$ : число функциональных символов и констант в левых частях

$eq(\mathcal{E})$ : число уравнений

**Факт 1:** при применении правил упрощения

характеристика системы уменьшается относительно  $\succ$

$$\mathcal{E}_1 = \begin{cases} \dots \\ t \equiv t \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{Triv}} \mathcal{E}'_1 = \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}_1) \geq vr(\mathcal{E}'_1)$$

$$fs(\mathcal{E}_1) \geq fs(\mathcal{E}'_1)$$

$$eq(\mathcal{E}_1) > eq(\mathcal{E}'_1)$$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{cases} \dots \\ t \equiv x \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{Swap}} \mathcal{E}'_2 = \begin{cases} \dots \\ x \equiv t \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}_2) \geq vr(\mathcal{E}'_2)$$

$$fs(\mathcal{E}_2) > fs(\mathcal{E}'_2)$$

# Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ( $\mathcal{E}_0 \not\rightarrow \infty$ )

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$$

$vr(\mathcal{E})$ : число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$ : число функциональных символов и констант в левых частях

$eq(\mathcal{E})$ : число уравнений

**Факт 1:** при применении правил упрощения

характеристика системы уменьшается относительно  $\succ$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) \equiv \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Func}} \mathcal{E}'_3 = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ t_1 \equiv s_1 \\ \dots \\ t_k \equiv s_k \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$vr(\mathcal{E}_3) \geq vr(\mathcal{E}'_3)$$

$$fs(\mathcal{E}_3) > fs(\mathcal{E}'_3)$$

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \mathbf{x} \equiv t \\ \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Elim}} \mathcal{E}'_4 = \left\{ \begin{array}{l} \dots \{\mathbf{x}/t\} \\ \mathbf{x} \equiv t \\ \dots \{\mathbf{x}/t\} \end{array} \right\}$$

$$vr(\mathcal{E}_4) > vr(\mathcal{E}'_4)$$



# Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ( $\mathcal{E}_0 \not\leftrightarrow \infty$ )

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$

$vr(\mathcal{E})$ : число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$ : число функциональных символов и констант в левых частях

$eq(\mathcal{E})$ : число уравнений

**Факт 2:** характеристика не может бесконечно долго убывать относительно  $\succ$

Чтобы «прочувствовать» этот факт, представьте, что характеристикой  $\langle a, b, c \rangle$  описывается **мешок конфет**:  $a$  вкусных,  $b$  обычных и  $c$  невкусных

Тогда убывание характеристики можно представить как одну из операций в пункте обмена конфет:

- ▶ отдать вкусную конфету  
и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- ▶ отдать обычную конфету  
и взамен получить сколько угодно невкусных
- ▶ отдать невкусную конфету

Оказывается, что так меняться конфетами невыгодно, и если слишком увлечься, то мешок непременно опустеет

# Доказательство теоремы об унификации

**Завершаемость** ( $\mathcal{E}_0 \not\rightsquigarrow \infty$ )

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$

$vr(\mathcal{E})$ : число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$ : число функциональных символов и констант в левых частях

$eq(\mathcal{E})$ : число уравнений

**Факт 2:** характеристика не может бесконечно долго убывать относительно  $\succ$

**Лемма.** Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно  $\succ$

Доказательство (леммы). Можете попробовать сами, если хотите

Отсутствие бесконечных убывающих последовательностей элементов в **частично упорядоченном множестве (ЧУМ)** принято называть **свойством обрыва убывающих цепей** и **фундированностью** множества

Фундированные ЧУМ нередко используются для обоснования завершаемости алгоритмов

# Доказательство теоремы об унификации

Успешность ( $\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta/\text{СТОП}$ )

*Предположим*, что алгоритм неуспешен

Это означает, что на очередном шаге получена **неприведённая** система  $\mathcal{E}$ , к которой невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Elim, NFunc, NElim

Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc  $\Rightarrow$  в левых частях  $\mathcal{E}$  содержатся **только** переменные

Невозможно применить правила Elim, NElim  $\Rightarrow$  все переменные в левых частях  $\mathcal{E}$  являются приведёнными

Следовательно,  $\mathcal{E}$  — система, в левых частях которой располагаются **только** приведённые переменные, то есть  $\mathcal{E}$  — **приведённая** система (*противоречие*)

# Доказательство теоремы об унификации

**Корректность** ( $\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}_0)$ )

Системы уравнений  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  **равносильны**, если  $\mathcal{Y}(\mathcal{E}) = \mathcal{Y}(\mathcal{E}')$

Достаточно показать, что при применении правил упрощения  
(Triv, Swap, Func, Elim)  
обязательно получается система, равносильная исходной

Для правил Triv, Swap и Func это **довольно просто**,  
так что подробно остановимся только на «трудном» правиле Elim

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{x} = t \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \{\mathbf{x}/t\} \\ \mathbf{x} = t \\ \dots \{\mathbf{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  равносильны

# Доказательство теоремы об унификации

Корректность ( $\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in \text{НОУ}(\mathcal{E}_0)$ )

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \dots \\ x \doteq t \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \dots \{x/t\} \\ x \doteq t \\ \dots \{x/t\} \end{cases}$$

$$Y(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} Y(\mathcal{E}')$$

( $\subseteq$ ): Пусть  $\eta \in Y(\mathcal{E})$

Тогда  $x\eta = t\eta$

Из доказательства леммы о связке:  $\eta = \{x/t\}\eta$ , а значит,

$$\begin{cases} \dots \eta \\ x\eta = t\eta \\ \dots \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \{x/t\}\eta \\ x\eta = t\eta \\ \dots \{x/t\}\eta \end{cases}$$

Следовательно,  $\eta$  — унификатор системы  $\mathcal{E}'$

( $\supseteq$ ): Рассуждения аналогичны

# Доказательство теоремы об унификации

**Полнота** ( $\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \text{СТОП} \Rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{E}_0) = \emptyset$ )

Для определённости положим, что «СТОП» выдано для системы  $\mathcal{E}$

*Пусть для этого было применено правило NFunc*

Тогда  $\mathcal{E}$  содержит уравнение  $\mathbf{f}(\dots) = \mathbf{g}(\dots)$ , где  $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки  $\theta$  не верно  $\mathbf{f}(\dots)\theta = \mathbf{g}(\dots)\theta$

*Иначе для этого было применено правило NElim*

Тогда  $\mathcal{E}$  содержит уравнение  $x = t$ , где  $x \in \text{Var}_t$  и  $x \neq t$

По **лемме о связке**, ни для какой подстановки  $\theta$  не верно  $x\theta = t\theta$

*Следовательно,  $\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \emptyset$*

Система  $\mathcal{E}$  была получена из  $\mathcal{E}_0$  применением правил  
Triv, Swap, Func, Elim

Согласно рассуждениям в обосновании **корректности** алгоритма,  
системы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}_0$  равносильны

Значит,  $\mathcal{U}(\mathcal{E}_0) = \emptyset$  ▼