

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 48

Модельные императивные программы
Постановка задачи верификации программ

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Императивные программы: синтаксис

Далее считаются заданными **сигнатура** σ логики предикатов и множество **предметных переменных** Var

Синтаксис императивных программ зададим следующей БНФ:

π	$::=$	$stmt \mid stmt \pi$	
$stmt$	$::=$	$\emptyset \mid$	(пустая команда)
		$x := t; \mid$	(присваивание)
		if C then π else π fi $\mid$	(ветвление)
		while C do π od	(цикл)

Здесь:

- ▶ π — программа
- ▶ $stmt$ — команда программы (или, по-другому, инструкция)
- ▶ $x \in \text{Var}$
- ▶ t — выражение: произвольный терм, такой что $\text{Var}_t \subseteq \text{Var}$
- ▶ C — условие: произвольная формула без кванторов, такая что $\text{Var}_C \subseteq \text{Var}$

Императивные программы: синтаксис

В примерах будут использоваться

- ▶ сигнатура, содержащая общеизвестные арифметические символы, включая
 - ▶ константы $0, 1$,
 - ▶ функциональные символы $+(2), -(2), \cdot(2)$,
 - ▶ предикатные символы $=^{(2)}, >^{(2)}, \geq^{(2)}$
- ▶ арифметическая интерпретация Ar_X логики предикатов над множеством чисел X , в которой эти символы оцениваются «естественно» как соответствующие числа, операции и отношения, в том числе $0, 1, +, -, \cdot, =, >, \geq$ — соответственно как
 - ▶ числа 0 и 1 ,
 - ▶ операции сложения, вычитания и умножения чисел и
 - ▶ отношения равенства чисел и их строгого и нестрогого неравенства в большую сторону

Императивные программы: синтаксис

Пример: реализация алгоритма Эвклида
вычисления наибольшего общего делителя чисел в переменных x , y

```
while  $\neg(x = y)$  do  
  if  $x > y$  then  
     $x := x - y$ ;  
  else  
     $y := y - x$ ;  
  fi  
od
```

Императивные программы: операционная семантика

Значение программы — это **вычисляемая ей функция** преобразования входных данных в выходные данные

Для задания этой функции определим следующие понятия:

- ▶ **Состояние данных**: совокупность значений переменных, преобразуемая при выполнении программы
- ▶ **Состояние управления**: описание того, как текущее состояние данных будет изменяться программой в дальнейшем выполнении
- ▶ **Состояние вычисления**: состояние данных + состояние управления, то есть описание значений данных сейчас и в оставшейся части выполнения программы

Императивные программы: операционная семантика

Состояние данных над переменными Var в интерпретации с предметной областью D — это отображение $\sigma : \text{Var} \rightarrow D$

Обозначение: $[x_1/\sigma(x_1), \dots, x_n/\sigma(x_n)]$, если $\text{Var} = \{x_1, \dots, x_n\}$

Состояние управления — это произвольная программа

Состояние вычисления — это пара $\langle \pi \mid \sigma \rangle$,

где π — состояние управления и σ — состояние данных

Будем использовать следующие обозначения:

- ▶ Σ — множество всех состояний данных
- ▶ $\tilde{\Sigma}$ — множество всех состояний вычисления
- ▶ $\sigma\{x \leftarrow d\}$ — состояние данных, получающееся из состояния данных σ в результате **присваивания** переменной x значения d :

$$\sigma\{x \leftarrow d\}(x) = d$$

$$\sigma\{x \leftarrow d\}(y) = \sigma(y), \text{ если } y \neq x$$

Императивные программы: операционная семантика

Шаг выполнения программы в интерпретации $\mathcal{I}$ описывается двуместным **отношением переходов** $\xrightarrow{\mathcal{I}}$ на множестве $\tilde{\Sigma}$, состоящим из всех пар следующего вида:

- ▶ $\langle x := t; \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \emptyset \mid \sigma \{x \leftarrow t\sigma\} \rangle$
- ▶ $\langle \text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi_1 \mid \sigma \rangle$, если $\mathcal{I} \models C\sigma$
- ▶ $\langle \text{if } C \text{ then } \pi_1 \text{ else } \pi_2 \text{ fi} \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi_2 \mid \sigma \rangle$, если $\mathcal{I} \not\models C\sigma$
- ▶ $\langle \text{while } C \text{ do } \pi \text{ od} \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \emptyset \mid \sigma \rangle$, если $\mathcal{I} \not\models C\sigma$
- ▶ $\langle \text{while } C \text{ do } \pi \text{ od} \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi \text{ while } C \text{ do } \pi \text{ od} \mid \sigma \rangle$, если $\mathcal{I} \models C\sigma$
- ▶ $\langle \pi_1 \pi_2 \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi'_1 \pi_2 \mid \sigma' \rangle$, если $\langle \pi_1 \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi'_1 \mid \sigma' \rangle$
- ▶ $\langle \emptyset \pi \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi \mid \sigma \rangle$

Императивные программы: операционная семантика

Трасса программы π из состояния данных σ в интерпретации $\mathcal{I}$ — это последовательность состояний вычисления вида

$$\langle \pi \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi_1 \mid \sigma_1 \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \langle \pi_2 \mid \sigma_2 \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}} \dots$$

Вычислениями программы называются бесконечные трассы и трассы, оканчивающиеся состоянием управления $\emptyset$

Последнее состояние данных конечной трассы называется **результатом** этой трассы

Запись $\langle \pi \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}}^* \tilde{\sigma}$ будет означать, что существует конечная трасса программы π из состояния данных σ в интерпретации $\mathcal{I}$, оканчивающаяся состоянием вычисления $\tilde{\sigma}$

Программой π в интерпретации $\mathcal{I}$ вычисляется частичная функция $\mathcal{I}[\pi] : \Sigma \rightarrow \Sigma$ следующего вида:

$$\mathcal{I}[\pi](\sigma) = \sigma' \quad \Leftrightarrow \quad \langle \pi \mid \sigma \rangle \xrightarrow{\mathcal{I}}^* \langle \emptyset \mid \sigma' \rangle$$

Императивные программы: операционная семантика (пример)

$$\text{Var} = \{x, y\}$$

$\pi = \textbf{while } \neg(x = y) \textbf{ do if } x > y \textbf{ then } x := x - y; \textbf{ else } y := y - x; \textbf{ fi od}$

Вычисление π из $[x/2, y/4]$ в $Ar_{\mathbb{Z}}$, где $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел:

$$\langle \pi \mid [x/2, y/4] \rangle$$

$$Ar_{\mathbb{Z}} \downarrow \quad \text{т.к. } Ar_{\mathbb{Z}} \models \neg(x = y)[x/2, y/4]$$

$$\langle \textbf{if } x > y \textbf{ then } x := x - y; \textbf{ else } y := y - x; \textbf{ fi } \pi \mid [x/2, y/4] \rangle$$

$$Ar_{\mathbb{Z}} \downarrow \quad \text{т.к. } Ar_{\mathbb{Z}} \not\models (x > y)[x/2, y/4]$$

$$\langle y := y - x; \pi \mid [x/2, y/4] \rangle$$

$$Ar_{\mathbb{Z}} \downarrow \quad \text{т.к. } [x/2, y/4]\{y \leftarrow (y - x)[x/2, y/4]\} = [x/2, y/2]$$

$$\langle \emptyset \pi \mid [x/2, y/2] \rangle$$

$$Ar_{\mathbb{Z}} \downarrow$$

$$\langle \pi \mid [x/2, y/2] \rangle$$

$$Ar_{\mathbb{Z}} \downarrow \quad \text{т.к. } Ar_{\mathbb{Z}} \not\models \neg(x = y)[x/2, y/2]$$

$$\langle \emptyset \mid [x/2, y/2] \rangle$$

Результат этого вычисления: $[x/2, y/2]$

Следовательно, $Ar_{\mathbb{Z}}[\pi]([x/2, y/4]) = [x/2, y/2]$

Задача верификации программ

Требования правильности выполнения программы могут быть записаны как два отношения на состояниях данных:

- ▶ **предусловие** φ ,
задающее общий вид **допустимых** входных данных
- ▶ **постусловие** ψ ,
описывающее устройство **правильных** выходных данных

Принято рассматривать два вида правильности выполнения программы относительно заданных предусловия и постусловия:

- ▶ **частичная корректность**: результат любого конечного вычисления программы на допустимых входных данных правилен
- ▶ **полная корректность**: любое вычисление программы на допустимых входных данных конечно, и результат этого вычисления правилен

Остановимся подробнее на частичной корректности программ

Задача верификации программ

Тройка Хоара (по-другому — **триплет Хоара**) — это запись вида $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$, где

- ▶ φ — формула логики предикатов, называемая **предусловием**
- ▶ π — программа
- ▶ ψ — формула логики предикатов, называемая **постусловием**

Триплет $\{\varphi\}\pi\{\psi\}$ **истинен в интерпретации** $\mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$),

если для любых состояний данных σ , σ' верно следующее:

если $\mathcal{I} \models \varphi\sigma$ и значение $\sigma' = \mathcal{I}[\pi](\sigma)$ определено, то $\mathcal{I} \models \psi\sigma'$

Программа π **частично корректна** в интерпретации $\mathcal{I}$ относительно предусловия φ и постусловия ψ , если $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$

Задача верификации императивных программ:

для заданных программы π , предусловия φ , постусловия ψ и интерпретации $\mathcal{I}$ проверить справедливость соотношения $\mathcal{I} \models \{\varphi\}\pi\{\psi\}$