Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 13

Теорема Лёвенгейма-Сколема
Теорема компактности Мальцева
Автоматизация доказательства теорем

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Вступление

Корректность и *полнота* метода семантических таблиц:
$\models \varphi \Leftrightarrow$ **для таблицы** $\langle \mid \varphi \rangle$ **существует успешный табличный вывод**

Полнота метода семантических таблиц (доказательство):
если $\models \varphi$**, то успешный табличный вывод можно построить, придерживаясь особой стратегии**

Свойства и "приёмы", обсуждавшиеся для метода семантических таблиц, позволяют

- обосновать несколько нетривиальных утверждений, не имеющих прямого отношения к методу, и
- естественно поставить важные алгоритмические вопросы, касающиеся проблемы общезначимости формул логики предикатов

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Вспомним определение выполнимости формул:
Формула выполнима $\Leftrightarrow$ она выполняется хотя бы в одной интерпретации

Представим себе, что для проверки выполнимости формулы разрешено перебрать **сколько угодно** интерпретаций и в каждой проверить выполнимость формулы

Следует ли перебрать все существующие в природе интерпретации, или же достаточно ограничиться только какими-нибудь “простыми”?

При переборе интерпретаций неважна природа предметов, но (как было отмечено, например, в *блоке 6*) важно **количество** предметов

Оказывается, что можно рассуждать о выполнимости формулы, имея в виду только “достаточно небольшие” по размеру интерпретации

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Для любого предложения φ справедлива равносильность:

$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ **имеет модель с <u>не более чем счётной</u> предметной областью**

Доказательство.

Корректность и *полнота*:
$\models \varphi \Leftrightarrow$ для $\mathrm{T}_0 = \langle \varphi \mid \, \rangle$ не существует успешного табличного вывода

Построив вывод согласно *стратегии*
из доказательства *теоремы о полноте*, получим

- бесконечную ветвь $\mathrm{T}_0 \to \mathrm{T}_1 \to \dots$ вывода,
состоящую только из незакрытых таблиц
- интерпретацию $\mathcal{I}$ с **не более чем счётной** предметной областью,
в которой выполняются все таблицы этой ветви —
в том числе и таблица T_0 ▼

Теорема компактности Мальцева

Вспоминаем блок 5:
методы проверки общезначимости формул можно применить
и для проверки логического следования одних формул из других

$$\psi_1, \ldots, \psi_k \models \varphi \Leftrightarrow \models \psi_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \psi_k \to \varphi$$

Здесь $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ — это **конечная** база знаний, относительно которой требуется проверить достоверность извлечённого следствия

А можно ли предложить что-нибудь аналогичное
для **бесконечных** баз знаний?

Оказывается, что, независимо от размера базы знаний,
в достоверности логического следствия можно убедиться,
выбрав для рассмотрения только некоторый **конечный** набор знаний

Теорема компактности Мальцева

Для любого предложения φ и любого множества предложений Γ справедлива равносильность:

$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad$ **существует <u>конечное</u> подмножество Γ' множества Γ, такое что $\Gamma' \models \varphi$**

Доказательство.

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T = \langle \Gamma \mid \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)
$\Leftrightarrow$ существует успешный табличный вывод $\mathfrak{D}$ для T

Подмножество Γ' формул множества Γ, к которым применяются правила вывода в $\mathfrak{D}$, <u>конечно</u>, как и подмножество Γ'' формул, содержащихся хотя бы в одной таблице в обеих частях (почему?)

Тогда для таблицы $\langle \Gamma' \cup \Gamma'' \mid \varphi \rangle$ также существует успешный табличный вывод (почему?)

Значит, $\Gamma' \cup \Gamma'' \models \varphi$ ▼

Автоматизация доказательства теорем

А можно ли поручить проверку общезначимости формул компьютеру, чтобы он делал всю работу за нас?

Если формула общезначима, то это можно обосновать, придерживаясь *стратегии построения табличного вывода* из доказательства *теоремы о полноте*

А если необщезначима ... (?)
... то на этот счёт есть только *теорема о корректности*:
успешного вывода для соответствующей таблицы не существует

Познакомившись с логикой предикатов получше, обсудим и то, что целиком переложить такую работу на компьютер **принципиально нельзя**[1]

Но если всё же попытаться, то ...

[1] То есть о том, что проблема общезначимости формул *алгоритмически неразрешима*

Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода[1], то в результате получится прувер: средство доказательства теорем логики предикатов

First-order theorem prover

К пруверу разумно было бы предъявить такие требования:

- корректность (выдаются только правильные ответы): обязательно
- полнота (ответы выдаются всегда): желательно (*но обязательно, увы, не потребуешь*)
- эффективность (ответы выдаются за разумное время): очень желательно

[1] Не обязательно стратегию из доказательства теоремы полноты. Не обязательно полную стратегию. Не обязательно табличного вывода

Автоматизация доказательства теорем

Если программно реализовать стратегию построения логического вывода, то в результате получится прувер: средство доказательства теорем логики предикатов

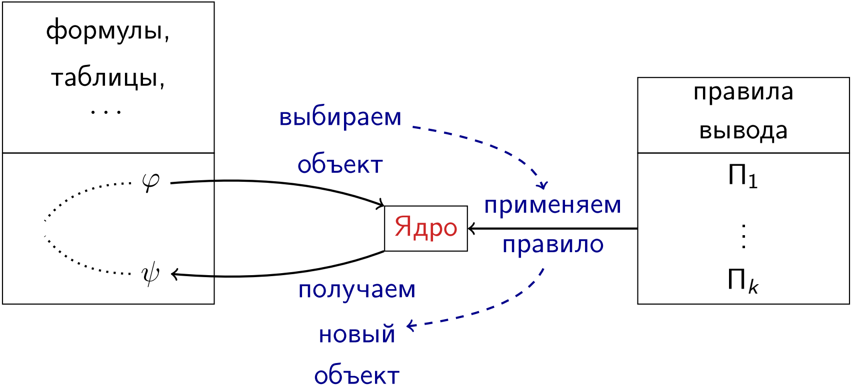
First-order theorem prover

Один из **многих** примеров того, чего позволило добиться использование пруверов:[1]
строго доказана корректность *nix-микроядра L4,
и в процессе доказательства найдены и исправлены сотни ошибок в коде

[1] Klein et al. seL4: formal verification of an OS kernel. 2009.
Конкретно этот пример выбран из-за наглядности, понятности и при этом "неоспоримой полезности" формулировки результата

Автоматизация доказательства теорем

Как устроены пруверы:



Автоматизация доказательства теорем

Представим себе прувер, способный проверять общезначимость формул логики предикатов **методом семантических таблиц**:

- корректный
- выдающий ответ “да” для **всех** общезначимых формул

Насколько эффективен может быть такой прувер?

Эффективность построения вывода определяется тем,

- как на каждом шаге выбираются формулы для применения к ним правил и
- какие термы подставляются при применении правил $L\forall$ и $R\exists$

Если прувером осуществляется полный перебор всех формул, возникающих в таблицах, или перебор слишком большого числа термов, то такой прувер, вероятно, окажется неэффективным

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина	В Киеве дядька
$\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$	$\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \& \ \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина $\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \& \ \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$
Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \to$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x) \ \& \ \text{Дядька}(y)))$	

Автоматизация доказательства теорем

Избежать полного перебора формул — непростая задача:

База знаний	Запрос
В огороде бузина $\text{Растёт}(\textbf{бузина}, \textbf{огород})$ Всё в огороде посадил дядька $\forall x\ (\text{Растёт}(x, \textbf{огород}) \to$ $\quad \exists y\ (\text{Посадил}(y, x)\ \&\ \text{Дядька}(y)))$ Бузину сажают только Киевляне $\forall x\ (\text{Посадил}(x, \textbf{бузина})$ $\quad \to \text{Живёт}(x, \textbf{Киев}))$	В Киеве дядька $\exists y\ (\text{Дядька}(y)$ $\quad \&\ \text{Живёт}(y, \textbf{Киев}))$

Автоматизация доказательства теорем

$L\forall \ \dfrac{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} \mid \Delta\rangle}$ $R\exists \ \dfrac{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x})\rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\}\rangle}$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Для примера представим себе, что при построении вывода
придётся перебрать все термы, составленные из
одного функционального символа $\mathbf{f}^{(2)}$, используемого не более 10 раз,
и **двух** различных констант (*вроде бы это не очень большие термы?*)

Можно легко посчитать, что существует
более 10^{300} различных термов такого вида

Число 10^{100} (на 200 нолей меньше) имеет особое название — гугол:
это бессмысленно большое число,
превосходящее число атомов в наблюдаемой вселенной

Автоматизация доказательства теорем

$$L\forall\ \frac{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}) \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma,\ \forall \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\} \mid \Delta\rangle} \qquad R\exists\ \frac{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x})\rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta,\ \exists \mathtt{x}\ \varphi(\mathtt{x}),\ \varphi(\mathtt{x})\{\mathtt{x}/t\}\rangle}$$

Избежать перебора большого числа термов — непростая задача

Существуют способы повышения эффективности перебора термов при построении логического вывода для доказательства общезначимости формул,[1,2]

Далее обсудим один из таких способов и основанный на нём метод:

метод резолюций

Заодно в процессе обсуждения познакомимся и с другими важными понятиями и задачами и методами, касающимися логики предикатов

---

1 J.A. Robinson: метод резолюций

2 С.Ю. Маслов: обратный вывод