

Упражнения по выразимости в теориях

Обозначения

\mathbb{N}_0 — множество всех целых неотрицательных чисел: $\{0, 1, 2, \dots\}$.

\mathbb{Z} — множество всех целых чисел: $\{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$.

\mathbb{R} — множество всех действительных чисел.

$Ar[X; Const; Func; Pred]$ — арифметическая интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$:

- X — предметная область: множество *чисел*;
- $Const \subseteq X$, и оценка каждого числа из $Const$ — само число;
- операции из $Func$ и предикаты из $Pred$ оцениваются естественным арифметическим образом:
 - \bar{s} — операция взятия следующего числа: $\bar{s}(\alpha) = \alpha + 1$;
 - $\bar{+}, \bar{\times}, \cdot^n$ — операции сложения и умножения чисел и операция возведения числа в n -ю степень;
 - $\equiv, <, \leq, >, \geq, \equiv_\alpha$ — отношения равенства, строгих и нестрогих неравенств чисел, равенства по модулю α ;
 - ...

Упражнение 1

Предложить аксиому, определяющую в интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \{\mathbf{0}\}; \{\mathbf{s}, +, \times\}; \{=\}]$:

1. Число n , $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Отношение \leq нестрогого неравенства чисел.
3. Операцию \cdot^n возведения числа в n -ю степень, $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Операцию $[\cdot/\cdot]$ деления чисел нацело ($x/0 = 0$).
5. Операцию rem вычисления остатка от деления ($rem(x, 0) = 0$).
6. Операцию max вычисления максимума двух чисел.
7. Операцию min вычисления минимума двух чисел.
8. Отношение $Factor = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}_0; x \text{ является делителем } y\}$.
9. Свойство $Exp2 = \{x \mid x \text{ — степень двойки}\}$.
10. Свойство $Prime = \{x \mid x \text{ — простое число}\}$.
11. Свойство $PrimeFactor = \{(x, y) \mid x \text{ — простой делитель числа } y\}$.
12. Отношение $Coprime = \{(x, y) \mid x, y \text{ — взаимно простые числа из } \mathbb{N}_0\}$.
13. Свойство $ExpPrime = \{x \mid x \text{ является степенью простого числа}\}$.
14. Отношение $\cdot \equiv \cdot$ равенства двух чисел по модулю третьего числа (всегда верно $x \equiv_0 y$).
15. Операцию **НОД** вычисления наибольшего общего делителя чисел (**НОД**($x, 0$) = **НОД**($0, x$) = 0).
16. Операцию **НОК** вычисления наименьшего общего кратного чисел (**НОК**($x, 0$) = **НОК**($0, x$) = 0).
17. Отношение
 $Root_n = \left\{ (y, x_0, \dots, x_n) \mid y, x_0, \dots, x_n \in \mathbb{N}_0; y \text{ — корень полинома } \sum_{i=0}^n (x_i \times z^i) \text{ относительно } z \right\}, n \in \mathbb{N}_0$.
18. Операцию $[\sqrt{\cdot}]$ вычисления целой части квадратного корня числа.
19. Операцию $f(x) = 2^x$.
20. Операцию $f(x) = x!$.

Упражнение 2

Доказать, что:

1. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \{\mathbf{0}\}; \{\mathbf{s}, +\}; \{=\}]$ невыразима операция \times .
2. В интерпретациях $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$, $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ выразимо отношение $=$.
3. В интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ выразимы числа 0 и 1.
4. В интерпретациях $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \emptyset; \{<\}]$ невыразимы числа 0 и 1.
5. В интерпретациях $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+\}; \{=\}]$ и $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \{+\}; \{=\}]$ выразимо число 0 и невыразимо число 1.
6. В интерпретации $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+\}; \{<\}]$ выразимы числа 0 и 1.
7. В интерпретации $Ar[\mathbb{R}; \emptyset; \{+\}; \{<\}]$ выразимо число 0 и невыразимо число 1.
8. В интерпретации $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+, \cdot^2\}; \{=\}]$ выразима операция \times .
9. В интерпретации $Ar[\mathbb{Z}; \emptyset; \{+, \cdot^3\}; \{=\}]$ невыразима операция \times .

Упражнение 3

Пусть \mathfrak{I} — множество всех интерпретаций \mathcal{I} сигнатуры $\sigma = \langle \emptyset, \{*(^{(2)})\}, \{=(^{(2)})\} \rangle$, для которых верно следующее: предметная область вместе с оценкой функционального символа $*$ образует полугруппу $(S_{\mathcal{I}})$; предикатный символ $=$ оценивается как отношение равенства элементов полугруппы $S_{\mathcal{I}}$.

Предложить множество аксиом сигнатуры σ , моделями которого являются:

1. Все интерпретации множества \mathfrak{I} и только они.
2. Все интерпретации \mathcal{I} множества \mathfrak{I} , такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ содержит нейтральный элемент, и только они.
3. Все интерпретации \mathcal{I} множества \mathfrak{I} , такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ является группой, и только они.
4. Все интерпретации \mathcal{I} множества \mathfrak{I} , такие что полугруппа $S_{\mathcal{I}}$ является абелевой группой, и только они.