Лекция 2. Свойства биномиальных коэффициентов. Метод производящих функций, подсчет сумм и доказательство тождеств. Полиномиальные коэффициенты. Принцип включений-исключений.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Дискретной математике 2”.
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Биномиальные коэффициенты

Напомним, что **биномиальный коэффициент** C_n^k равен числу сочетаний из n по k.

Мы знаем, что $C_n^k = \frac{(n)_k}{k!}$.
Отсюда получаем

$$\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(n)_k \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Следовательно,

Свойство 1. *Для всех* $0 \leq k \leq n$ *верно* $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Последовательности биномиальных коэффициентов

Теорема 2. *При каждом $n \geq 1$ (конечная) последовательность биномиальных коэффициентов C_n^r, где $r = 0, 1, \dots, n$, возрастает, если $r < \frac{n-1}{2}$, и убывает, если $r > \frac{n-1}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение $\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r}$, $0 \leq r \leq n-1$:

$$\frac{C_n^{r+1}}{C_n^r} = \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n-r}{r+1}.$$

Определим, когда это отношение больше единицы:

$$\frac{n-r}{r+1} > 1, \text{ если } r < \frac{n-1}{2}.$$

Последовательности биномиальных коэффициентов

Доказательство (продолжение). Получаем, что
при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность возрастает,
при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность убывает.

$\square$

Пример 1.
Пусть $n = 3$. Тогда последовательность такова: $1,\ 3,\ 3,\ 1$.
Пусть $n = 4$. Тогда последовательность такова: $1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$.

Максимальные значения

Следствие 2.1. *При четных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается только при $r = \frac{n}{2}$;*

при нечетных значениях n максимальное значение среди биномиальных коэффициентов C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$.

Доказательство. По теореме 2 если $n \geq 1$, то при $r < \frac{n-1}{2}$ последовательность C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, возрастает и при $r > \frac{n-1}{2}$ последовательность C_n^r, $r = 0, 1, \ldots, n$, убывает.

Максимальные значения

Доказательство. Если значение n четно, то число $\frac{n-1}{2}$ нецелое; поэтому максимальное значение достигается при $r = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = \frac{n}{2}$;

если значение n нечетно, то число $\frac{n-1}{2}$ целое; следовательно, $C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}}$, и максимальное значение достигается при $r = \frac{n-1}{2}$ и при $r = \frac{n+1}{2}$. $\square$

Следствие 2.2. *Для всех $n \geq 1$ и $0 \leq r \leq n$ верно $C_n^r \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Суммы биномиальных коэффициентов

Напомним формулу бинома Ньютона:

При $n \geq 1$ *верно* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

Из нее следуют два свойства сумм биномиальных коэффициентов:

Теорема 3. *Для всех* $n \geq 1$ *верно*

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Доказательство.

1. $(1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.
2. $((-1)+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$. $\square$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Можно находить значения других сумм биномиальных коэффициентов.

Пример 2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k$, где $a \in \mathbb{R}$.

Например, если $n = 2$, $a = 2$, то надо найти значение суммы $C_2^0 \cdot 2^0 + C_2^1 \cdot 2^1 + C_2^2 \cdot 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$.

Решение. Несложно заметить, что указанная сумма непосредственно сворачивается по биному Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot 1^{n-k} = (a+1)^n.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 3. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Например, если $n = 3$, то надо найти значение суммы $0 \cdot C_3^0 + 1 \cdot C_3^1 + 2 \cdot C_3^2 + 3 \cdot C_3^3 = 0 + 3 + 6 + 3 = 12$.

Решение. Заметим, что при $k \geq 1$ верно

$$k \cdot C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

Слагаемое при $k = 0$ обнуляется. Поэтому, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = \sum_{k=1}^{n} n \cdot C_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^{l} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Подсчет сумм биномиальных коэффициентов

Пример 4. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k}$.

Например, если $n = 4$, то надо найти значение суммы
$C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 1 + 6 + 1 = 8$.
Если $n = 5$, то надо найти значение суммы
$C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 1 + 10 + 5 = 16$.

Решение. По теореме 3 (п. 2) верно $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Поэтому $\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k+1}$.
Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}.$$

Производящие функции

Одним из методов получения значения комбинаторных сумм и доказательства тождеств является метод **производящих функций**.

Для последовательности чисел $\{a_n\}$ (конечной или бесконечной) рассмотрим формальную сумму (конечную или бесконечную) $\sum a_n t^n$, где $t \in \mathbb{R}$.

Если последовательность $\{a_n\}$ конечна, то эта сумма всегда определяет функцию

$$F(t) = \sum a_n t^n,$$

которая называется **производящей функцией** для последовательности $\{a_n\}$.

Рассмотрим примеры подсчета комбинаторных сумм при помощи производящих функций.

Применение производящих функций

Вернемся к **примеру 3**: нам надо найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k$.

Решение. Рассмотрим конечную последовательность биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ и ее производящую функцию $F(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k t^k$. Из примера 2 следует, что $F(t) = (t+1)^n$.

Функция $F(t)$ дифференцируема в $\mathbb{R}$. Найдем ее производную.

С одной стороны, $F'(t) = ((t+1)^n)' = n(t+1)^{n-1}$.

С другой стороны, $F'(t) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k t^k\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k k t^{k-1}$.

Подставляя в оба полученные выражения для производной $F'(t)$ значение $t = 1$, получаем $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

Применение производящих функций

Пример 5. Доказать тождество $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^k \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

Решение. Рассмотрим конечные последовательности биномиальных коэффициентов C_n^r и C_m^r, где $r = 0, 1, \ldots, \max(n, m)$, и их производящие функции

$$F(t) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r t^r = (t+1)^n \text{ и } G(t) = \sum_{r=0}^{m} C_m^r t^r = (t+1)^m.$$

Тогда

$$F(t) \cdot G(t) = (t+1)^n \cdot (t+1)^m = (t+1)^{n+m} = \sum_{s=0}^{n+m} C_{n+m}^s t^s.$$

С другой стороны, перемножаем многочлены:

$$F(t) \cdot G(t) = \left(\sum_{r=0}^{n} C_n^r t^r\right) \cdot \left(\sum_{r=0}^{m} C_m^r t^r\right) = \sum_{s=0}^{n+m} \left(\sum_{r=0}^{s} C_n^r \cdot C_m^{s-r}\right) t^s.$$

Приравнивая коэффициенты при t^k, получаем

$$\sum_{r=0}^{k} C_n^r \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k.$$

Обобщение формулы бинома Ньютона

Можно найти формулу для степени суммы вида $(x_1 + \dots + x_m)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона.

Теорема 4. *Для всех $n \geq 1$, $m \geq 2$ верно*

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_m \geq 0 : \\ k_1 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

Доказательство можно провести индукцией по m. Базис индукции составляет формула бинома Ньютона.

$\square$

Полиномиальные коэффициенты

Комбинаторное число $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{m-1}!k_m!}$, где $n \geq 1,\ k_1, \ldots, k_m \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, называется **полиномиальным коэффициентом** и обозначается $C(n; k_1, \ldots, k_m)$.

Через полиномиальные коэффициенты формулу из теоремы 4 можно переписать в следующем виде.

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} C(n; k_1, \ldots, k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Формула квадрата суммы трех переменных

Пример 6. Найдем формулу для выражения $(x+y+z)^2$.

Решение. В соответствии с теоремой 4 сначала нам нужно найти всевозможные разбиения числа $n=2$ на *упорядоченные* суммы трех $(m=3)$ неотрицательных чисел.

Таких разбиений ровно $\hat{C}(3,2)=C(3+2-1,2)=6$:
$2=0+0+2=0+1+1=0+2+0=1+0+1=1+1+0=2+0+0$.

Теперь для каждой суммы надо найти соответствующий полиномиальный коэффициент:

$$C(2;0,0,2)=C(2;0,2,0)=C(2;2,0,0)=\frac{2!}{0!0!2!}=1;$$
$$C(2;0,1,1)=C(2;1,0,1)=C(2;1,1,0)=\frac{2!}{0!1!1!}=2.$$

Следовательно, получаем формулу

$$(x+y+z)^2=z^2+2yz+y^2+2xz+2xy+x^2.$$

Сумма полиномиальных коэффициентов

Аналогично теореме 3 можно получить значение суммы полиномиальных коэффициентов.

Теорема 5. *Для всех* $n \geq 1$, $m \geq 2$ *верно*

$$\sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0, \\ k_1 + \cdots + k_m = n}} C(n; k_1, \ldots, k_m) = m^n.$$

Доказательство. Подставим в формулу из теоремы 4 значения $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

$\square$

Пример о студентах

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 7. При исследовании читательских интересов студентов оказалось, что 60% студентов читают журнал A, 50% – журнал B, 50% – журнал C, 30% – журналы A и B, 50% – журналы A и C, 20% – журналы B и C, 20% – журналы A, B и C.

Сколько процентов студентов читают хотя бы один из журналов A, B и C?

Метод решения подобных задач дает принцип **включений-исключений**.

Формула включения-исключения

Теорема 6 (формула включения-исключения). Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$.
Тогда

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

Доказательство можно провести, воспользовавшись свойствами биномиальных коэффициентов.

Рассмотрим произвольный элемент a из множества $A_1 \cup \cdots \cup A_n$.
Определим, **сколько раз он будет подсчитан** по формулам в утверждении теоремы **в левой и правой частях**.

В левой части он учитывается 1 раз.

Формула включения-исключения

Доказательство (продолжение). Перейдем к правой части.

Если $a \notin A_{i_j}$ для некоторого индекса i_j, то $a \notin A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} \cap \dots \cap A_{i_r}$. Поэтому в таких пересечениях он **не учитывается**.

Пусть элемент a принадлежит в точности множествам $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$. Тогда он **будет содержаться во всех возможных пересечениях** из этих множеств **и только в них**.

Число самих множеств –	$k = C_k^1$;
число их попарных пересечений –	C_k^2;
число их пересечений по три –	C_k^3;
$\dots$	
число их пересечений по k –	$1 = C_k^k$.

Формула включения-исключения

Доказательство (продолжение).
Тогда по формуле в правой части элемент a подсчитается

$$(-1)^0 C_k^1 + (-1)^1 C_k^2 + \cdots + (-1)^{k-1} C_k^k \text{ раз.}$$

Воспользуемся свойствами биномиальных коэффициентов и получим:

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} C_k^r = -\left(\left(\sum_{r=1}^{k} (-1)^r C_k^r\right) +1 -1\right) =$$

$$= -\left(\left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r\right) -1\right) = 1.$$

Следовательно, в правой части каждый такой элемент учитывается тоже ровно 1 раз. $\square$

Решение задачи о студентах

Пример 7. Журнал A читают 60% студентов, журнал B – 50% студентов, журнал C – 50% студентов; 30% – журналы A и B, 50% – журналы A и C, 20% – журналы B и C; 20% – журналы A, B и C. Сколько процентов студентов читают хотя бы один из журналов A, B и C?

Решение. По формуле включения-исключения получаем:
$|A| = 60$; $|B| = |C| = 50$;
$|A \cap B| = 30$; $|A \cap C| = 50$; $|B \cap C| = 20$;
$|A \cap B \cap C| = 20$.
Тогда
$|A \cup B \cup C| = (60 + 50 + 50) - (30 + 50 + 20) + (20) =$
$160 - 100 + 20 = 80$.
Т.е. хотя бы один журнал читают 80% студентов.

Продолжение задачи о студентах

Пример 7 (продолжение). В условиях этого примера можно задавать другие вопросы.

Сколько процентов студентов читают ровно два журнала?

Сколько процентов студентов читают не менее двух журналов?

Ответы на эти вопросы можно получить на основе следующих теорем.

Производные случаи формулы включения-исключения

Формула включения-исключения для числа элементов, обладающих **в точности** m свойствами:

Теорема 7. *Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$. Тогда число элементов множества A, принадлежащих* **в точности** *m множествам из $A_1, \ldots, A_n$, где $0 \leq m \leq n$, можно найти по формуле*

$$\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{m+r}\leq n} C_{m+r}^{m}|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m+r}}|.$$

Доказательство проведем аналогично теореме 6.
Рассмотрим произвольный элемент a, принадлежащий **не менее**, чем m множествам из $A_1, \ldots, A_n$.
Определим, **сколько раз он будет подсчитан** по формулам в утверждении теоремы **в левой и правой частях**.

Производные случаи формулы включения-исключения

Доказательство (продолжение). В левой части он учитывается 1 раз.

Перейдем к правой части.

Пусть элемент a принадлежит в точности множествам $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, причем $k \geq m$ (Почему?).
Тогда он будет **содержаться во всех возможных пересечениях** из этих множеств **и только в них**.

Число их пересечений по $m+0$ – C_k^m;
число их пересечений по $m+1$ – C_k^{m+1};
...
число их пересечений по $m+(k-m)$ – $1 = C_k^{m+(k-m)}$.

Производные случаи формулы включения-исключения

Доказательство (продолжение). Тогда по формуле в правой части элемент a подсчитается $\sum\limits_{r=0}^{k-m}(-1)^r C_{m+r}^m C_k^{m+r}$ раз.

Рассмотрим произведение

$$C_{m+r}^m C_k^{m+r} = \frac{(m+r)!}{m!r!}\cdot\frac{k!}{(m+r)!(k-m-r)!} =$$

$$= \frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{(k-m)!}{r!(k-m-r)!} = C_k^m\cdot C_{k-m}^r.$$

Следовательно, воспользовавшись свойствами биномиальных коэффициентов, получаем:

$$\sum_{r=0}^{k-m}(-1)^r C_{m+r}^m C_k^{m+r} = C_k^m\sum_{r=0}^{k-m}(-1)^r C_{k-m}^r = \begin{cases} 1, & k-m=0; \\ 0, & k-m\geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, в правой части элемент a учитывается ровно 1 раз в том случае, когда он обладает **в точности** m свойствами. В остальных случаях он не учитывается.

Производные случаи формулы включения-исключения

Формула включения-исключения для числа элементов, обладающих **не менее**, чем m свойствами:

Теорема 8. *Пусть A – конечное множество, и $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$. Тогда число элементов множества A, принадлежащих* **не менее**, *чем m множествам из $A_1, \ldots, A_n$, где $0 \leq m \leq n$, можно найти по формуле*

$$\sum_{r=0}^{n-m} (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{m+r} \leq n} C_{m+r-1}^{m-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m+r}}|.$$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Решение продолжения задачи о студентах

Пример 7. Журнал A читают 60% студентов, журнал B – 50% студентов, журнал C – 50% студентов; 30% – журналы A и B, 50% – журналы A и C, 20% – журналы B и C; 20% – журналы A, B и C.

Решение (продолжение). По формулам найдем ответы на поставленные вопросы.

1. Ровно два журнала читают

$$(-1)^0 C_{2+0}^2(30+50+20)+(-1)^1 C_{2+1}^2(20)=100-3\cdot 20=40$$

процентов студентов.

2. Не менее двух журналов читают

$$(-1)^0 C_{2+0-1}^1(30+50+20)+(-1)^1 C_{2+1-1}^1(20)=100-2\cdot 20=60$$

процентов студентов.

Пример о существенной зависимости от переменных

Пример 8. Подсчитать число функций алгебры логики, **существенно** зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Решение. Пусть A_i – это множество таких функций алгебры логики, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, для которых x_i – несущественная переменная, $i = 1, \ldots, n$.

По формуле включения-исключения получаем, что

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

Заметим, что $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| = 2^{2^{n-r}}$.

Пример о существенной зависимости от переменных

Следовательно, $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum\limits_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} C_n^r 2^{2^{n-r}}$.

Но $A_1 \cup \dots \cup A_n$ – это множество функций алгебры логики, у которых есть хотя бы одна несущественная переменная. Поэтому число функций алгебры логики, **существенно** зависящих от переменных $x_1, \dots, x_n$, равно

$$2^{2^n} - \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} C_n^r 2^{2^{n-r}} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} C_n^r 2^{2^{n-r}}.$$

Например, число функций алгебры логики, **существенно** зависящих от переменных x_1, x_2, равно

$$C_2^0 \cdot 2^{2^2} - C_2^1 \cdot 2^{2^1} + C_2^2 \cdot 2^{2^0} = 16 - 8 + 2 = 10.$$

Это функции: xy, $\overline{x \to y}$, $\overline{y \to x}$, $\overline{xy}$, $x \sim y$, $x \oplus y$, $x \vee y$, $x \vee \bar{y}$, $\bar{x} \vee y$, $\bar{x} \vee \bar{y}$.

Пример о шляпах

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 9. Пять человек сдают шляпы в гардероб. При условии, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что хотя бы один человек получит свою шляпу обратно?

Подобные задачи можно решать при помощи подсчета перестановок определенного вида, которые называются **беспорядками**.

Задача о числе перестановок-беспорядков

Применим формулу включения-исключения для подсчета числа перестановок-**беспорядков**.

Перестановка $i_1, i_2, \ldots, i_n$ элементов $1, 2, \ldots, n$ называется **беспорядком**, если $i_j \neq j$ для каждого $j = 1, \ldots, n$.

Другими словами, **никакой элемент не стоит на "своем" месте**.

Например, перестановка $2, 3, 4, 5, 1$ является беспорядком, а перестановка $5, 4, 3, 2, 1$ им не является.

Задача состоит в подсчета числа перестановок-беспорядков из n элементов.

Задача о числе перестановок-беспорядков

Пусть A_j – это множество перестановок $i_1, i_2, \ldots, i_n$ элементов $1, 2, \ldots, n$, для которых $i_j = j$, где $j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что $|A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_r}| = (n-r)!$.

Тогда по формуле включения-исключения получаем:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n} |A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_r}| =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} C_n^r (n-r)! = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{n!(n-r)!}{r!(n-r)!} = n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!}.$$

Задача о числе перестановок-беспорядков

Но $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ – это число перестановок, **не являющихся** беспорядками.

Поэтому для искомой величины числа перестановок-беспорядков $B(n)$ получаем формулу:

$$B(n) = n! - n! \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}}{r!} = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}.$$

Заметим, что

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}.$$

Поэтому

$$\frac{B(n)}{n!} \to \frac{1}{e} \text{ при } n \to \infty.$$

Т.е. доля перестановок-беспорядков среди всех перестановок стремится к величине $\frac{1}{e}$ с ростом n.

Решение задачи о шляпах

Напомним условие задачи.

Пример 9. Пять человек сдают шляпы в гардероб. При условии, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что хотя бы один человек получит свою шляпу обратно?

Решение. По формуле находим искомую величину

$$\frac{n!\sum\limits_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}}{n!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{120-60+20-5+1}{120} = \frac{76}{120} = \frac{19}{30}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

2. Найти значение суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} k2^k$.

3. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ – **все** простые числа от 1 до $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$. Найдите формулу для подсчета количества простых чисел от 1 до N.

4. Четыре человека сдают шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что **ровно** k $(0 \leq k \leq 4)$ человек получат свою шляпу обратно.

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. II, с. 197-200, 202-214.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. VIII 1.13, 1.18, 1.25, 2.4–2.6, 3.10.

3. Селезнева С.Н. Основы дискретной математики. М.: МАКС Пресс, 2010. Ч. 2.3, с. 28-31.

Конец лекции