Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 20

Алгоритм унификации атомарных формул

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Напоминание: задача унификации

Для заданных выражений E_1, E_2
выяснить, унифицируемы ли эти выражения,
и если это так, то вычислить
множество унификаторов, полное в $\text{У}(E_1, E_2)$

Чтобы освоить метод резолюций,
достаточно научиться решать эту задачу для произвольной пары **атомов**

Системы уравнений над термами

Унификация атомов $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)$, $\mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что $t_1\theta = s_1\theta, \quad \dots, \quad t_k\theta = s_k\theta$

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление подстановки θ, такой что левая и правая части каждого уравнения в системе $\mathcal{E}$ вида

$$\begin{cases} t_1 = s_1 \\ \quad \dots \\ t_k = s_k \end{cases}$$

становятся посимвольно одинаковыми при применении θ

$$\Leftrightarrow$$

Вычисление **решения системы уравнений** $\mathcal{E}$
в свободной[1] алгебре термов[2]

---

[1] Значение терма — это сам терм,
то есть термы равны, если они посимвольно совпадают

[2] **Операция** композиции — это подстановка терма на место переменной

Системы уравнений над термами

Знак равенства в системах уравнений будем записывать так: $\stackrel{\circ}{=}$ — чтобы различать равенство в системе и посимвольное совпадение выражений

Системой уравнений (*в свободной алгебре термов*) будем называть запись $\mathcal{E}$ вида

$$\begin{cases} t_1 \stackrel{\circ}{=} s_1 \\ \quad \dots \\ t_k \stackrel{\circ}{=} s_k \end{cases},$$

где $t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_k$ — термы

Подстановка θ — унификатор (*решение*) системы $\mathcal{E}$, если для каждого i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, верно $t_i\theta = s_i\theta$

У$(\mathcal{E})$ — множество всех унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема (*имеет решение*), если У$(\mathcal{E}) \neq \emptyset$

НОУ$(\mathcal{E})$ — множество всех *наиболее общих* унификаторов системы уравнений $\mathcal{E}$

Системы уравнений над термами

Пример

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{x}) \eqcirc \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) \eqcirc \mathrm{z} \end{cases} \qquad \mathcal{E}\theta = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \eqcirc \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathbf{g}(\mathbf{c})) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) \eqcirc \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$

$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathbf{c}, \mathrm{z}/\mathbf{g}(\mathbf{c})\}$ — унификатор системы $\mathcal{E}$
(*и на самом деле даже **наиболее общий***)

А система $\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathrm{y}) \eqcirc \mathbf{f}(\mathrm{y}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \\ \mathbf{g}(\mathrm{y}) \eqcirc \mathrm{z} \end{cases}$ неунифицируема

Системы уравнений над термами

Утверждение

Множества унификаторов любой пары атомов

$$\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k),\ \mathrm{P}(s_1, \dots, s_k)$$

и соответствующей системы уравнений

$$\begin{cases} t_1 \stackrel{\circ}{=} s_1 \\ \dots \\ t_k \stackrel{\circ}{=} s_k \end{cases}$$

совпадают

Доказательство. Очевидным образом следует из определений унификатора атомов и унификатора системы

Утверждение

Для любой пары различных предикатных символов $\mathrm{P}^{(k)}$, $\mathrm{Q}^{(m)}$ атомы $\mathrm{P}(t_1, \dots, t_k)$ и $\mathrm{Q}(s_1, \dots, s_m)$ не унифицируемы

Доказательство. Тоже очевидно?

Унификация переменной и терма

Лемма(*о связке*)

Для любых переменной x и терма t верно следующее:

1. **Если $x = t$, то $\varepsilon \in$ НОУ(x, t)**
2. **Если $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$, то $\{\mathrm{x}/t\} \in$ НОУ(x, t)**
3. **Если $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$, то У$(\mathrm{x}, t) = \emptyset$**

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{x}\varepsilon = \mathrm{x}$ и для любой подстановки η верно $\eta = \varepsilon\eta$

2. $\mathrm{x} \notin \mathsf{Var}_t$

Достаточно показать, что:

а) $\{\mathrm{x}/t\}$ — унификатор (*переменной* x *и терма* t)

б) для любого унификатора θ существует унификатор η, такой что
$$\theta = \{\mathrm{x}/t\}\,\eta$$

а) $\mathrm{x}\,\{\mathrm{x}/t\} = t = t\,\{\mathrm{x}/t\}$

Унификация переменной и терма

Лемма(*о связке*)

Для любых переменной $\mathtt{x}$ и терма t верно следующее:

1. **Если** $x = t$, **то** $\varepsilon \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
2. **Если** $\mathtt{x} \notin \mathrm{Var}_t$, **то** $\{\mathtt{x}/t\} \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
3. **Если** $\mathtt{x} \in \mathrm{Var}_t$ **и** $\mathtt{x} \neq t$, **то У**$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

2б) $\mathtt{x} \notin \mathrm{Var}_t$ и $\mathtt{x}\theta = t\theta \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists\eta \quad \theta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$

Достаточно показать, что $\theta = \{\mathtt{x}/t\}\theta$

Для этого рассмотрим произвольную переменную $\mathtt{y}$ и покажем, что

$$\mathtt{y}\theta = \mathtt{y}\{\mathtt{x}/t\}\theta:$$

- Если $\mathtt{y} = \mathtt{x}$, то $\mathtt{y}\theta = \mathtt{x}\theta = t\theta = \mathtt{x}\,\{\mathtt{x}/t\}\theta = \mathtt{y}\,\{\mathtt{x}/t\}\,\theta$
- Иначе $\mathtt{y} \neq \mathtt{x}$, и $\mathtt{y}\theta = \mathtt{y}\,\{\mathtt{x}/t\}\theta$

Так как для любой переменной $\mathtt{y}$ верно равенство $\mathtt{y}\,\{\mathtt{x}/t\}\,\theta = \mathtt{y}\theta$, верно и $\theta = \{\mathtt{x}/t\}\,\theta$

Унификация переменной и терма

Лемма(*о связке*)

Для любых переменной $\mathtt{x}$ **и терма** t **верно следующее:**

1. **Если** $x = t$**, то** $\varepsilon \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
2. **Если** $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$**, то** $\{\mathtt{x}/t\} \in$ **НОУ**$(\mathtt{x}, t)$
3. **Если** $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ **и** $\mathtt{x} \neq t$**, то У**$(\mathtt{x}, t) = \emptyset$

Доказательство.

3. $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$, $\mathtt{x} \neq t$

Рассмотрим произвольную подстановку θ и покажем,
что она не может являться унификатором $\mathtt{x}$ и t

Пусть $\mathtt{x}\theta = s$

Тогда $|\mathtt{x}\theta| = |s| < |t\{\mathtt{x}/s\}| \leq |t\theta|$ (|*p*|— *длина терма p*)

$|\mathtt{x}\theta| < |t\theta|$, а значит, $\mathtt{x}\theta \neq t\theta$ ▼

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 \doteq t_1 \\ \quad \dots \\ \mathtt{x}_\mathtt{k} \doteq t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{k}$ — попарно различные переменные,
не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{k}\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} \doteq \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{z} \doteq \mathtt{w} \\ \mathtt{u} \doteq \mathbf{g}(\mathbf{c}) \end{cases}$$ — **приведённая** система

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 \doteq t_1 \\ \quad \dots \\ \mathtt{x}_k \doteq t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные,
не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Пример

$$\begin{cases} \mathtt{x} \doteq \mathbf{f}(\mathtt{y}, \mathbf{g}(\mathtt{y})) \\ \mathtt{x} \doteq \mathtt{w} \\ \mathtt{y} \doteq \mathbf{g}(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathtt{z}) \doteq \mathbf{f}(\mathbf{c}, \mathtt{x}) \end{cases}$$ — **неприведённая** система:

1. $\mathbf{g}(\mathtt{z})$ стоит в левой части уравнения, и это не переменная
2. $\mathtt{x}$ встречается в левых частях два раза
3. $\mathtt{y}$ встречается и в левой, и в правой частях

Унификация приведённой системы

Система уравнений является приведённой, если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1 \doteq t_1 \\ \quad \dots \\ \mathtt{x}_k \doteq t_k \end{cases},$$

где $\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k$ — попарно различные переменные, не встречающиеся в правых частях уравнений:

$$\{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_k\} \cap \bigcup_{1 \le i \le k} \mathsf{Var}_{t_k} = \emptyset$$

Лемма(*о приведённой системе*). Если $\mathcal{E} = \begin{cases} \mathtt{x}_1 \doteq t_1 \\ \quad \dots \\ \mathtt{x}_k \doteq t_k \end{cases}$ **— приведённая система, то** $\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_k/t_k\} \in$ **НОУ**$(\mathcal{E})$

Доказательство. Следует из *леммы о связке* ▼

Унификация произвольной системы

Алгоритм, о котором будет дальше идти речь, коротко описывается так: это *метод исключения переменных*, широко применяющийся для решения *систем линейных алгебраических уравнений* и адаптированный к свободной алгебре термов

Напоминание, как работает этот метод для уравнений над действительными числами:

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{cases} x \doteq 3 - z + y \\ 2y + 3z \doteq x + 2 \end{cases} & \mapsto \begin{cases} x \doteq 3 - z + y \\ 2y + 3z \doteq 3 - z + y + 2 \end{cases} & \longmapsto & \begin{cases} x \doteq 3 - z + y \\ y \doteq 5 - 4z \end{cases} \\
 & & & \downarrow \\
\text{решения очевидны} \dashrightarrow & \begin{cases} x \doteq 8 - 5z \\ y \doteq 5 - 4z \end{cases} & \longleftarrow & \begin{cases} x \doteq 3 - z + 5 - 4z \\ y \doteq 5 - 4z \end{cases}
\end{array}
$$

В свободной алгебре термов вместо спектра арифметических операций содержится только одна операция композиции,
но это не мешает без особых усилий адаптировать метод

Унификация произвольной системы

Алгоритм унификации ($\mathfrak{A}$):[1]

Далее будут описаны 6 правил преобразования системы уравнений

Эти правила **произвольно** (**недетерминированно**) применяются к системе, пока не станет верным одно из условий:

- получена приведённая система уравнений
  - ответ: унификатор из *леммы о приведённой системе*
- **явно** установлена невозможность унификации системы
  - ответ: СТОП: система неунифицируема

[1] Martelli A., Montanari U. An efficient unification algorithm. 1982

Унификация произвольной системы

Правила преобразования системы уравнений

Упрощение системы: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

Triv: удалить $t \doteqdot t$

Swap: заменить $t \doteqdot \mathtt{x}$ на $\mathtt{x} \doteqdot t$, если $t \notin \mathsf{Var}$

Func: заменить $\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \doteqdot \mathbf{f}(s_1, \ldots, s_k)$ на $\begin{cases} t_1 \doteqdot s_1 \\ \ \ldots \\ t_k \doteqdot s_k \end{cases}$

Elim: если в системе содержится уравнение *Eq* : $\mathtt{x} \doteqdot t$, где

- $\mathtt{x} \notin \mathsf{Var}_t$ и
- $\mathtt{x}$ встречается в других уравнениях системы

то применить подстановку $\{\mathtt{x}/t\}$ ко всем уравнениям системы, кроме *Eq*

Унификация произвольной системы

Правила преобразования системы уравнений

Явная неунифицируемость: $(\mathtt{x} \in \mathsf{Var},\ t \in \mathsf{Term})$

NElim: если в системе содержится уравнение $\mathtt{x} \doteq t$,
где $\mathtt{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathtt{x} \neq t$, то
СТОП: система неунифицируема

NFunc: если в системе содержится уравнение
$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k) \doteq \mathbf{g}(s_1, \ldots, s_m)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, то
СТОП: система неунифицируема

Унификация произвольной системы

Примеры

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathbf{f}(x, \mathbf{g}(y)) \eqcirc \mathbf{f}(\mathbf{g}(y), x) \\ \mathbf{c} \eqcirc y \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \begin{cases} x \eqcirc \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) \eqcirc x \\ \mathbf{c} \eqcirc y \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \begin{cases} x \eqcirc \mathbf{g}(y) \\ \mathbf{g}(y) \eqcirc x \\ y \eqcirc \mathbf{c} \end{cases} \xmapsto{\text{Elim} \times 2} \begin{cases} x \eqcirc \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{c}) \eqcirc \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ y \eqcirc \mathbf{c} \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Triv}} \begin{cases} x \eqcirc \mathbf{g}(\mathbf{c}) \\ \text{—} \\ y \eqcirc \mathbf{c} \end{cases} \leftarrow\text{- - - - - - - - - - - - -} \text{ приведённая система}$$

Ответ: $\{x/\mathbf{g}(\mathbf{c}),\ y/\mathbf{c}\} \in$ НОУ$(\mathcal{E})$

Унификация произвольной системы

Примеры

$$\mathcal{E}' = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{y})) \doteq \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \doteq \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{NFunc}} \text{СТОП}$$

Ответ: $\text{У}(\mathcal{E}') = \emptyset$

$$\mathcal{E}'' = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathrm{x})) \doteq \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{y}), \mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \doteq \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \begin{cases} \mathrm{x} \doteq \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathbf{g}(\mathrm{x}) \doteq \mathrm{x} \\ \mathbf{c} \doteq \mathrm{y} \end{cases}$$

$$\xmapsto{\text{Swap}} \begin{cases} \mathrm{x} \doteq \mathbf{g}(\mathrm{y}) \\ \mathrm{x} \doteq \mathbf{g}(\mathrm{x}) \\ \mathbf{c} \doteq \mathrm{y} \end{cases} \xmapsto{\text{NElim}} \text{СТОП}$$

Ответ: $\text{У}(\mathcal{E}'') = \emptyset$

Унификация произвольной системы

Теорема(*об унификации*)
Для любой системы уравнений $\mathcal{E}_0$

- алгоритм $\mathfrak{A}$ завершает работу на $\mathcal{E}_0$ (завершаемость)
- по завершении алгоритмом $\mathfrak{A}$ выдаётся подстановка или сообщение СТОП (успешность)
- если выдана подстановка θ, то $\theta \in$ НОУ$(\mathcal{E}_0)$ (корректность)
- если выдано сообщение СТОП, то система $\mathcal{E}$ неунифицируема (полнота)

Следствие
Атомы $E_1 = \mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)$ и $E_2 = \mathrm{Q}(s_1, \dots, s_k)$ унифицируемы
$\Leftrightarrow$ НОУ$(E_1, E_2) \neq \emptyset$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrowtail \infty$)

Далее будет строго сформулированы и обоснованы следующие факты:

- на каждом шаге работы алгоритма система становится проще
- после конечного числа шагов работы алгоритма обязательно получается система, которую нельзя упростить

Предложим характеристику системы, которая
убывает на каждом шаге и при этом
не может убывать бесконечно долго

Завершаемость алгоритма
очевидным образом следует из существования такой характеристики:

если система упрощается на каждом шаге
и не может упрощаться бесконечно,
то число шагов конечно

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrowtail \infty$)

Переменную $\mathtt{x}$ назовём приведённой в системе $\mathcal{E}$, если $\mathcal{E}$

- содержит уравнение вида $\mathtt{x} \doteq t$, где $\mathtt{x} \notin \mathrm{Var}_t$, и
- не содержит $\mathtt{x}$ в других уравнениях

Характеристикой системы $\mathcal{E}$ объявим упорядоченную тройку чисел $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$, где

- $vr(\mathcal{E})$ — число неприведённых переменных системы $\mathcal{E}$
- $fs(\mathcal{E})$ — суммарное число функциональных символов и констант в левых частях уравнений $\mathcal{E}$
- $eq(\mathcal{E})$ — число уравнений системы $\mathcal{E}$

Лексикографический порядок на тройках целых чисел определяется так:

$$\langle n_1, n_2, n_3\rangle \succ \langle m_1, m_2, m_3\rangle \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n_1 > m_1 \\ n_1 = m_1,\ n_2 > m_2 \\ n_1 = m_1,\ n_2 = m_2,\ n_3 > m_3 \end{array}\right.$$

Пример: $\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 2, 10, 5577\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrowtail \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$

$vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных

$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях

$eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E}_1 = \begin{cases} \ldots \\ t \doteq t \\ \ldots \end{cases} \xmapsto{\text{Triv}} \mathcal{E}'_1 = \begin{cases} \ldots \\ \\ \ldots \end{cases}$$

$vr(\mathcal{E}_1) \geq vr(\mathcal{E}'_1)$ $\quad$ $fs(\mathcal{E}_1) \geq fs(\mathcal{E}'_1)$ $\quad$ $eq(\mathcal{E}_1) > eq(\mathcal{E}'_1)$

$$\mathcal{E}_2 = \begin{cases} \ldots \\ t \doteq \mathrm{x} \\ \ldots \end{cases} \xmapsto{\text{Swap}} \mathcal{E}'_2 = \begin{cases} \ldots \\ \mathrm{x} \doteq t \\ \ldots \end{cases}$$

$vr(\mathcal{E}_2) \geq vr(\mathcal{E}'_2)$ $\quad$ $fs(\mathcal{E}_2) > fs(\mathcal{E}'_2)$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrowtail \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E}) \rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 1: при применении правил упрощения
характеристика системы уменьшается относительно $\succ$

$$\mathcal{E}_3 = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{f}(t_1, \dots, t_k) \doteqdot \mathbf{f}(s_1, \dots, s_k) \\ \dots \end{cases} \xmapsto{\text{Func}} \mathcal{E}_3' = \begin{cases} \dots \\ \quad t_1 \doteqdot s_1 \\ \quad \dots \\ \quad t_k \doteqdot s_k \\ \dots \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}_3) \geq vr(\mathcal{E}_3') \qquad fs(\mathcal{E}_3) > fs(\mathcal{E}_3')$$

$$\mathcal{E}_4 = \begin{cases} \dots \\ \mathrm{x} \doteqdot t \\ \dots \end{cases} \xmapsto{\text{Elim}} \mathcal{E}_4' = \begin{cases} \dots\{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} \doteqdot t \\ \dots\{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

$$vr(\mathcal{E}_4) > vr(\mathcal{E}_4')$$

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrow \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

Лемма. Не существует бесконечной последовательности троек неотрицательных целых чисел, убывающей относительно $\succ$

Доказательство (леммы). Попробуйте сами

Отсутствие бесконечных убывающих последовательностей элементов в *частично упорядоченном множестве* (*ЧУМ*) принято называть свойством обрыва убывающих цепей и фундированностью множества

Фундированные ЧУМ нередко используются для обоснования завершаемости алгоритмов

Доказательство теоремы об унификации

Завершаемость ($\mathcal{E}_0 \not\rightarrowtail \infty$)

$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \langle vr(\mathcal{E}), fs(\mathcal{E}), eq(\mathcal{E})\rangle$ $vr(\mathcal{E})$: число неприведённых переменных
$fs(\mathcal{E})$: число функциональных символов и констант в левых частях $eq(\mathcal{E})$: число уравнений

Факт 2: характеристика не может убывать бесконечно долго относительно $\succ$

А взамен доказательства леммы пусть будет такая иллюстрация:

Представьте, что у Вас есть 10 килограммов конфет: вкусных, обычных и невкусных — и Вы пришли в пункт обмена конфет, в котором можно

- отдать вкусную конфету
  и взамен получить сколько угодно обычных и невкусных
- отдать обычную конфету
  и взамен получить сколько угодно невкусных
- отдать невкусную конфету (*всё равно она Вам не нужна*)

Оказывается, что чем дольше обмениваетесь конфетами,
тем Вы ближе к тому, чтобы все их потерять

Доказательство теоремы об унификации

Успешность ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta/\text{СТОП}$)

Неуспешность алгоритма означает, что на очередном шаге получена неприведённая система $\mathcal{E}$, к котороой невозможно применить ни одно из правил Triv, Swap, Func, Elim, NFunc, NElim

Невозможно применить правила Triv, Swap, Func, NFunc $\Rightarrow$
в левых частях $\mathcal{E}$ содержатся **только** переменные

Невозможно применить правила Elim, NElim $\Rightarrow$
все переменные в левых частях $\mathcal{E}$ являются приведёнными

Следовательно, $\mathcal{E}$ — система, в левых частях которой располагаются **только** приведённые переменные,
то есть $\mathcal{E}$ — приведённая система (*противоречие*)

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E}_0)$)

Системы уравнений $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны, если У$(\mathcal{E}) =$ У$(\mathcal{E}')$

Достаточно показать, что при применении правил упрощения

(Triv, Swap, Func, Elim)

обязательно получается система, равносильная исходной

Для правил Triv, Swap и Func это довольно просто,
так что подробно остановимся только на “трудном” правиле Elim

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \quad \dots \\ \mathrm{x} \doteq t \\ \quad \dots \end{cases} \xmapsto{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \quad \dots \{\mathrm{x}/t\} \\ \mathrm{x} \doteq t \\ \quad \dots \{\mathrm{x}/t\} \end{cases}$$

Покажем, что системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ равносильны

Доказательство теоремы об унификации

Корректность ($\mathcal{E}_0 \leadsto \theta \Rightarrow \theta \in$ НОУ$(\mathcal{E}_0)$)

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \ \ \dots \\ \mathtt{x} \doteqdot t \\ \ \ \dots \end{cases} \xmapsto{\text{Elim}} \mathcal{E}' = \begin{cases} \ \ \dots \{\mathtt{x}/t\} \\ \mathtt{x} \doteqdot t \\ \ \ \dots \{\mathtt{x}/t\} \end{cases}$$

$$\text{У}(\mathcal{E}) \stackrel{?}{=} \text{У}(\mathcal{E}')$$

($\subseteq$): Пусть $\eta \in$ У$(\mathcal{E})$

Тогда $\mathtt{x}\eta = t\eta$

Из доказательства леммы о связке: $\eta = \{\mathtt{x}/t\}\,\eta$, а значит,

$$\begin{cases} \ \ \dots \eta \\ \mathtt{x}\eta = t\eta \\ \ \ \dots \eta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ \ \dots \{\mathtt{x}/t\}\,\eta \\ \mathtt{x}\eta = t\eta \\ \ \ \dots \{\mathtt{x}/t\}\,\eta \end{cases}$$

Следовательно, η — унификатор системы $\mathcal{E}'$

($\supseteq$): Рассуждения аналогичны

Доказательство теоремы об унификации

Полнота ($\mathcal{E}_0 \rightsquigarrow$ СТОП $\Rightarrow$ У$(\mathcal{E}_0) = \emptyset$)

Для определённости считаем, что сообщение СТОП выдано для системы $\mathcal{E}$

Пусть для этого было применено правило NFunc

Тогда $\mathcal{E}$ содержит уравнение $\mathbf{f}(\dots) \doteq \mathbf{g}(\dots)$, где $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$

Ни для какой подстановки θ не верно $\mathbf{f}(\dots)\theta = \mathbf{g}(\dots)\theta$

Иначе для этого было применено правило NElim

Тогда $\mathcal{E}$ содержит уравнение $\mathrm{x} \doteq t$, где $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}_t$ и $\mathrm{x} \neq t$

По *лемме о связке*, ни для какой подстановки θ не верно $\mathrm{x}\theta = t\theta$

Итог: система $\mathcal{E}$ неунифицируема

Система $\mathcal{E}$ была получена из $\mathcal{E}_0$ применением правил

Triv, Swap, Func, Elim

По *корректности алгоритма*, системы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ равносильны

Значит, система $\mathcal{E}$ неунифицируема ▼