Планарные графы. Формула Эйлера для планарных графов. Критерий Понтрягина-Куратовского.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Планарные графы

Граф G называется **планарным**, если его можно так отобразить на плоскость, что:

1) каждой *вершине* $v \in V$ сопоставлена *точка*, причем разным вершинам — разные точки;

2) каждому *ребру* $(v, w) \in E$ сопоставлена непрерывная *кривая*, соединяющая точки, соответствующие вершинам v и w, и не проходящая через точки, соответствующие другим вершинам;

3) кроме того, кривые, соответствующие различным ребрам, не пересекаются за исключением своих концов.

Такое отображение планарного графа на плоскость назовем его **укладкой на плоскости**.

Грани

Связные области плоскости, ограниченные ребрами планарного графа при его укладке на плоскости, называются **гранями**, неограниченная область называется также **внешней гранью**.

Формула Эйлера

Теорема (формула Эйлера для планарных графов). *Если $G = (V, E)$ — связный планарный граф с p вершинами и q ребрами, то для для каждой его укладки на плоскости верно равенство $p - q + r = 2$, где r — число граней в этой укладке.*

Доказательство: индукция по q при заданном p.

Базис индукции: если $q = p - 1$, то G — дерево.
Каждое дерево — планарный граф с одной гранью, поэтому формула верна.

Формула Эйлера

Доказательство.
Индуктивный переход: рассмотрим связный планарный граф G с p вершинами и $q \geqslant p$ ребрами. Пусть задана его укладка на плоскости, в которой r граней.

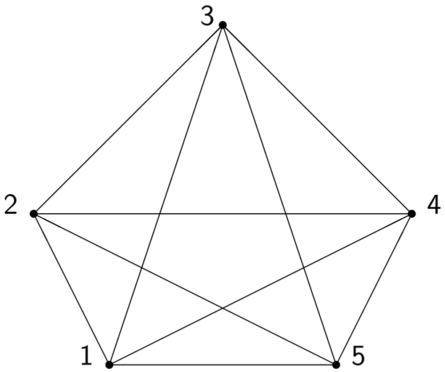
В графе G найдется хотя бы один цикл, и пусть e — любое ребро из какого-то его цикла.

Тогда граф G', полученный из G удалением ребра e, является связным и планарным с p вершинами и $q - 1$ ребрами, и его укладка на плоскости содержит $r - 1$ граней, т. к. при удалении ребра e из укладки графа G две грани соединяются в одну.

Для графа G' верно предположение индукции, т. е.
$p - (q - 1) + (r - 1) = 2$, откуда $p - q + r = 2$.

$\square$

Граф K_5



Непланарность K_5

Теорема. *Граф K_5 не является планарным.*

Доказательство проведем от обратного: пусть граф K_5 планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 5$ — число вершин и $q = 10$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 7$.

Непланарность K_5

Доказательство. Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро разделяет две грани.

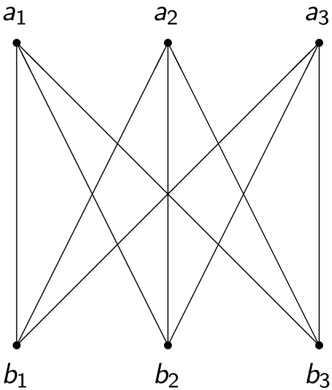
Но $q_i \geqslant 3$, поэтому $3r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{2}{3} \cdot q$.

Получаем: $7 \leqslant \frac{2}{3} \cdot 10$ — противоречие.

Значит, граф K_5 не является планарным.

$\square$

Граф $K_{3,3}$



Непланарность $K_{3,3}$

Теорема. *Граф $K_{3,3}$ не является планарным.*

Доказательство проведем от обратного: пусть граф $K_{3,3}$ планарен.

Тогда для произвольной его укладки на плоскости верно равенство:

$$p - q + r = 2,$$

где $p = 6$ — число вершин и $q = 9$ число ребер в графе, а r — число граней в этой укладке. Поэтому $r = 5$.

Непланарность $K_{3,3}$

Доказательство. Пусть q_i — число ребер, встречающихся при обходе границы i-й грани в этой укладке, $i = 1, \dots, r$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i = 2q$, т. к. каждое ребро разделяет две грани.

Но $q_i \geqslant 4$, т. к. в $K_{3,3}$ наименьшая длина цикла равна четырем, поэтому $4r \leqslant 2q$, или $r \leqslant \frac{q}{2}$.

Получаем: $5 \leqslant \frac{9}{2}$ — противоречие.

Значит, граф $K_{3,3}$ не является планарным.

$\square$

Гомеоморфизм графов

Говорят, что граф $G' = (V', E')$ получен из графа $G = (V, E)$ **подразбиением ребра** $e = (v, w) \in E$, если

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{u\}, \text{ где } u \notin V; \\ E' &= E \setminus \{(v, w)\} \cup \{(v, u), (u, w)\}. \end{aligned}$$

Граф G' называется **подразбиением** графа G, если G' может быть получен из G конечным числом подразбиений ребер.

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **гомеоморфными**, если найдутся изоморфные их подразбиения G_1' и G_2' соответственно.

Критерий планарности

Теорема (критерий Понтрягина-Куратовского).
Граф $G = (V, E)$ *планарен тогда и только тогда, когда в нем не найдется ни одного подграфа, гомеоморфного либо графу* K_5*, либо графу* $K_{3,3}$.

Литература

1. Алексеев В.Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 34–37.