

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 15

Равносильность формул

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

Из булевой алгебры:

$$A \vee B \rightarrow (C \& D \rightarrow E)$$

$$\mapsto$$

$$(x \rightarrow y \mapsto \neg x \vee y)$$

$$\neg(A \vee B) \vee \neg(C \& D) \vee E$$

$$\mapsto$$

$$(\neg(x \& y) \mapsto \neg x \vee \neg y; \dots \mapsto \dots)$$

$$\neg A \& \neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E$$

$$\mapsto$$

$$(\dots \mapsto \dots)$$

$$(\neg A \vee \neg C \vee \neg D \vee E) \& (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee E)$$

Нижняя формула получена из верхней
при помощи **основных тождеств** булевой алгебры

Значит, можно быть уверенным в том,
что эти формулы имеют одинаковый смысл

Неплохо было бы (и для метода резолюций, и в целом)
уметь преобразовывать формулы **логики предикатов**
с гарантированным сохранением их смысла

Равносильность формул

Эквивалентность (логическая связка):

$\varphi \leftrightarrow \psi$ — это сокращение для формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

Формулы φ , ψ **равносильны** ($\varphi \sim \psi$), если формула $\varphi \leftrightarrow \psi$ общезначима

Утверждение. Для любых равносильных формул $\varphi(\tilde{x}^n)$, $\psi(\tilde{x}^n)$ ЛП, интерпретации $\mathcal{I}$ и набора предметов $\tilde{d}^n$ верно следующее:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$$

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$. Тогда:

$\models (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$ (по определению равносильности)

$\mathcal{I} \models ((\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi))[\tilde{d}^n]$ (по определению общезначимости)

$\mathcal{I} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\tilde{d}^n]$ (по семантике « $\&$ »)

$\mathcal{I} \models \psi[\tilde{d}^n]$ (по семантике « $\rightarrow$ » и соотношению $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$)

($\Leftarrow$) Аналогично ▼

Равносильность формул

Утверждение. $\sim$ — отношение эквивалентности

Утверждение. Если формула φ общезначима, то любая равносильная ей формула ψ также общезначима

Утверждение. Если формула φ выполнима, то любая равносильная ей формула ψ также выполнима

Доказательства опустим для экономии времени

Основные равносильности

Законы булевой алгебры

Коммутативность $\&$ и $\vee$:

$$\varphi \& \psi \sim \psi \& \varphi$$

$$\varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$$

Ассоциативность $\&$ и $\vee$:

$$(\varphi \& \psi) \& \chi \sim \varphi \& (\psi \& \chi)$$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \chi \sim \varphi \vee (\psi \vee \chi)$$

Дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$ и $\&$ относительно $\vee$:

$$\varphi \& (\psi \vee \chi) \sim \varphi \& \psi \vee \varphi \& \chi$$

$$\varphi \vee (\psi \& \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$$

Идемпотентность $\&$ и $\vee$:

$$\varphi \& \varphi \sim \varphi$$

$$\varphi \vee \varphi \sim \varphi$$

Инволютивность $\neg$:

$$\neg \neg \varphi \sim \varphi$$

Законы де Моргана для $\&$ и для $\vee$:

$$\neg(\varphi \& \psi) \sim \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg \varphi \& \neg \psi$$

Закон удаления импликации:

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi$$

...

...

...

Основные равносильности

Правила работы с кванторами

Переименование связанной переменной:

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}) \qquad \exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\})$$

(если $y \notin \text{Var}_\varphi$ и подстановка $\{x/y\}$ правильна для φ)

Продвижение отрицания под квантор:

$$\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi \qquad \neg \exists x \varphi \sim \forall x \neg \varphi$$

Вынесение квантора за скобки:

$$\begin{aligned} \forall x \varphi \& \psi &\sim \forall x (\varphi \& \psi) & \exists x \varphi \& \psi &\sim \exists x (\varphi \& \psi) \\ \forall x \varphi \vee \psi &\sim \forall x (\varphi \vee \psi) & \exists x \varphi \vee \psi &\sim \exists x (\varphi \vee \psi) \end{aligned}$$

(если $x \notin \text{Var}_\psi$)

Строго говоря, справедливость каждой упомянутой равносильности следует **обосновать**

Но эти обоснования устроены очень просто и однотипно, и потому здесь не приводятся: достаточно применить **метод семантических таблиц**

Теорема о равносильной замене

$\varphi[\![\psi]\!]$ — обозначение формулы φ , содержащей подформулу ψ

$\varphi[\![\psi/\chi]\!]$ — формула, получающаяся из φ заменой
некоторого вхождения подформулы ψ на χ

Теорема (о равносильной замене в ЛП)

Для любых формул φ, ψ, χ логики предикатов верно:

$$\psi \sim \chi \quad \Rightarrow \quad \varphi[\![\psi]\!] \sim \varphi[\![\psi/\chi]\!]$$

Доказательство (индукцией по структуре формулы φ).

База индукции: $\varphi = \psi$ — очевидно ($\psi \sim \chi \Rightarrow \varphi = \psi \sim \chi$)

Индуктивный переход. Подробно разберём только один случай:

$$\varphi(\tilde{x}^n) = \forall x (\varphi'[\![\psi]\!])$$

Остальные случаи аналогичны

Теорема о равносильной замене

Доказательство (индуктивный переход).

Утверждение: $\forall x (\varphi' \llbracket \psi \rrbracket) \sim \forall x (\varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket)$

Индуктивное предположение: $\varphi' \llbracket \psi \rrbracket \sim \varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket$, то есть для любой интерпретации $\mathcal{I}$ и любых предметов $d, \tilde{d}^n$ верно:

$$\mathcal{I} \models (\varphi' \llbracket \psi \rrbracket \rightarrow \varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket)[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models (\varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket \rightarrow \varphi' \llbracket \psi \rrbracket)[x/d, \tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Тогда

$$\mathcal{I} \models \forall x (\varphi' \llbracket \psi \rrbracket \rightarrow \varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket)[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models \forall x (\varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket \rightarrow \varphi' \llbracket \psi \rrbracket)[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Из блока 10: $\models \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$, а значит:

$$\mathcal{I} \models (\forall x \varphi' \llbracket \psi \rrbracket \rightarrow \forall x \varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket)[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

$$\mathcal{I} \models (\forall x \varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket \rightarrow \forall x \varphi' \llbracket \psi \rrbracket)[\tilde{x}^n/\tilde{d}^n]$$

Но это и есть $\forall x (\varphi' \llbracket \psi \rrbracket) \sim \forall x (\varphi' \llbracket \psi/\chi \rrbracket)$ ▼

Пример напоследок

Используя равносильную замену, можно существенно изменить форму высказывания, сохранив его смысл — (не)выполнимость в каждой интерпретации на каждом наборе предметов

Например,

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

$\sim$

$$(\exists x \varphi \sim \exists y (\varphi\{x/y\}))$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$$

$\sim$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\neg \forall x P(x) \vee \exists y P(y)$$

$\sim$

$$(\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi)$$

$$\exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$\sim$

$$(\exists x \varphi \vee \psi \sim \exists x (\varphi \vee \psi); \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi)$$

$$\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

$\sim$

$$(\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi)$$

$$\exists x \exists y (P(x) \rightarrow P(y))$$