Лекция 4. Графы. Простейшие свойства графов. Деревья. Остовные деревья. Оценка числа висячих вершин в остовном дереве.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Определение графа

(**Неориентированным**) **графом** G называется пара (V, E), где V — непустое конечное множество вершин; E — конечное множество ребер, причем каждому ребру $e \in E$ сопоставлена **неупорядоченная** пара вершин, т. е. $e = (v, w)$, где $v, w \in V$.

Петли и кратные ребра

Ребро $e = (v, v)$, где $v \in V$, называется **петлей**.

Ребра $e_1 = (v, w)$ и $e_2 = (v, w)$, где $v, w \in V$ и $e_1 \neq e_2$, называются **кратными** ребрами.

Граф, в котором допускаются и петли, и кратные ребра иногда называется **псевдографом**.
Граф без петель, но, возможно, с кратными ребрами называется **мультиграфом**.
Граф без петель и кратных ребер называется **простым**, или **обыкновенным** графом.

Мы будем, как правило, рассматривать простые графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Дальнейшие определения будут вводится, в основном, только для таких графов.

Смежность

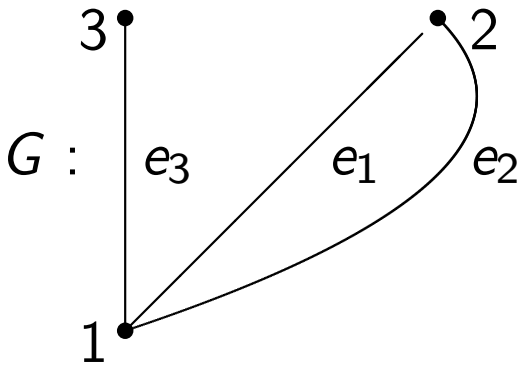
Говорят, что ребро $e = (v, w)$ **соединяет** вершины v и w, или **исходит** из вершины v (и из вершины w), или вершина v (и вершина w) и ребро e — **инцидентны** .

При этом вершины v и w называются **концами** ребра e, или **смежными** (**соседними**) по ребру e.

Изображения графов

Для наглядности графы можно изображать: вершинам ставятся в соответствие **точки** (причем разным вершинам сопоставляются различные точки); ребрам сопоставляются непрерывные **кривые**, соединяющие соответствующие вершины (точки) (разным ребрам соответствуют различные кривые).

Пусть $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, где $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (1, 2)$ и $e_3 = (1, 3)$.



Изоморфизм графов

Два графа (без петель и кратных ребер)

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ и } G_2 = (V_2, E_2)$$

называются **изоморфными**, если найдется такое взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, что для любой пары вершин $v, w \in V_1$ верно соотношение:

$$(v, w) \in E_1 \text{ тогда и только тогда, когда } (\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2.$$

Полные графы

Полным графом называется граф, в котором любые две различные вершины смежны;

K_n — полный граф с n вершинами, K_3 — **треугольник**.

Двудольные графы

Двудольным графом называется граф, в котором вершины можно так разбить на две непустые части (доли), что смежны только вершины из разных долей.

Полный двудольный граф — двудольный граф, в котором смежны любые две вершины из разных долей;

$K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями из m и n вершин.

Степень вершины

Степенью $d_G(v)$ вершины $v \in V$ в графе $G = (V, E)$ называется число исходящих из нее ребер (причем петля считается дважды).

В простых графах степень вершины совпадает с числом смежных с ней вершин.

Если $d_G(v) = 0$, то вершина v называется **изолированной** в графе G, если $d_G(v) = 1$, то вершина v называется **висячей** (или **концевой**) в графе G.

Обозначения: $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} d_G(v)$ — соответственно наименьшая и наибольшая степени вершин в графе G.

Формула Эйлера для степеней вершин

Предложение 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер. Тогда*
1) $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$;
2) *в графе G число вершин, имеющих нечетную степень, четно*.

Доказательство. 1. Рассмотрим сумму в левой части равенства. Любое ребро графа имеет два конца, поэтому каждое ребро в этой сумме будет подсчитано ровно два раза. Получаем выражение в правой части равенства.
2. Свойство непосредственно следует из равенства п. 1.

$\square$

Пути в графах

Путем в графе $G = (V, E)$ из вершины v_0 в вершину v_m (или (v_0, v_m)-**путем**) называется последовательность вершин и ребер графа G

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_m,$$

в которой $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E$ для каждого $i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 0$.

При этом вершина v_0 называется **началом** пути, вершина v_m называется **концом** пути. Число m ребер пути называется его **длиной**.

Для графов без петель и кратных ребер **путь** однозначно определяется последовательностью вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m$.

Цепь — путь без повторений ребер.

Простая цепь — цепь без повторений вершин.

Циклы в графах

Замкнутый путь — путь, в котором первая и последняя вершины совпадают.

Цикл — замкнутый путь без повторений ребер.

Простой цикл — цикл, в котором все вершины, кроме последней, различны.

Свойства путей и цепей

Предложение 2. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф без петель и кратных ребер. Тогда*

1) *в графе* G *из любого замкнутого пути нечетной длины* m, $m \geqslant 3$, *можно выделить простой цикл нечетной длины*;

2) *в графе* G *найдутся*

а) *простая цепь с длиной, не меньшей* $\delta(G)$,

б) *при* $\delta(G) \geqslant 2$ *простой цикл с длиной, не меньшей* $\delta(G) + 1$.

Свойства путей и цепей

Доказательство. 1. Рассмотрим замкнутый путь P нечетной длины m, $m \geqslant 3$. Если в нем никакая вершина, кроме последней не повторяется, то он — искомый простой цикл нечетной длины. Пусть некоторая вершина $v \in V$ в нем повторяется, т. е.

$$P = vP_1vP_2v,$$

где vP_1v, vP_2v — непустые замкнутые пути, на которые вершина v разбивает путь P. Пусть m_1, m_2 — длины путей vP_1v, vP_2v, причем, $m_1 < m$ и $m_2 < m$. Но $m = m_1 + m_2$ и m нечетное число, поэтому либо m_1 — нечетное число, либо m_2 — нечетное число. Повторим рассуждения для нового замкнутого пути с меньшей нечетной длиной. Через конечное число шагов получим искомый простой цикл нечетной длины.

Свойства путей и цепей

Доказательство. 2. а) Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in V$.

Положим $P_0 = v_0$ — простая цепь длины 0. Пусть мы уже построили простую цепь $P_i = v_0, v_1, \ldots, v_i$ длины i.

Если $i = \delta(G)$, то P_i — искомая простая цепь.

Пусть $i < \delta(G)$. Т. к. $d_G(v_i) \geqslant \delta(G)$, найдется такая вершина $v_{i+1} \in V$, не совпадающая ни с одной из вершин $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}$, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Добавим эту вершину v_{i+1} к цепи P_i, т. е. построим простую цепь $P_{i+1} = v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}$ длины $(i+1)$.

Через $\delta(G)$ шагов мы получим искомую простую цепь.

Свойства путей и цепей

Доказательство. 2. б) Пусть мы построили простую цепь $P_m = v_0, v_1, \ldots, v_m$ длины $m = \delta(G)$.

Если найдется такая вершина v_{m+1}, не совпадающая с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_m$, что $(v_m, v_{m+1}) \in E$, то добавим эту вершину v_{m+1} к цепи P_m, т. е. построим простую цепь $P_{m+1} = v_0, v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ длины $(m+1)$.

Так будем действовать до тех пор, пока не получим такую простую цепь $P_{m'} = v_0, v_1, \ldots, v_m, \ldots v_{m'}$ длины m', $m' \geqslant m$, что все вершины, с которыми связана вершина $v_{m'}$, лежат на цепи $P_{m'}$.

Пусть v_{i_0}, $i_0 < m'$, — вершина с наименьшим номером на цепи $P_{m'}$, с которой связана вершина $v_{m'}$. Тогда искомый простой цикл $C = v_{i_0}, \ldots, v_{m'}, v_{i_0}$.

$\square$

Подграфы

Граф $H = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, и **остовным** подграфом, если при этом $V' = V$.

Операции над графами.

Граф $G - e$, где $e \in E$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Граф $G - v$, где $v \in V$, — граф с множеством вершин $V \setminus \{v\}$ и с множеством ребер E без всех ребер с концами в вершине v.

Граф $G + e$, где $e = (v, w)$, $e \notin E$:
$G + e = (V \cup \{v, w\}, E \cup \{e\})$.

Связность

Граф $G = (V, E)$ называется **связным**, если для любых двух его вершин найдется путь, который их соединяет (а значит, и простая цепь, которая их соединяет).

Максимальный (по включению) связный подграф графа G называется его **компонентой связности**.

Если G — связный граф, то у графа G одна компонента связности.

Свойства связных графов

Предложение 3.
1) *Если к связному графу добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то в полученном графе найдется цикл.*
2) *Если из связного графа удалить ребро, принадлежащее какому-то циклу, то останется связный граф.*

Свойства связных графов

Доказательство. 1. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и $e = (v, w)$, где $v, w \in V$, $e \notin E$.

Граф G — связный, поэтому в нем найдется (v, w)-путь. Если в этом пути есть повторяющиеся вершины, то уберем из него части между двумя повторами одной и той же вершины. Так получим простую (v, w)-цепь P в графе G. В графе $G + e$ простая цепь P также содержится. Тогда $C = vPw(w, v)v$ — искомый цикл в графе $G + e$.

Свойства связных графов

Доказательство. 2. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф и ребро e принадлежит циклу C графа G.

Рассмотрим две произвольные вершины u_1, u_2 графа $G - e$. Эти же вершины принадлежат графу G. Граф G — связный, поэтому в графе G найдется (u_1, u_2)-путь P. Если путь P не проходит через ребро e, то он содержится и в графе $G - e$. Если же путь P проходит через ребро e, то заменим в нем это ребро ребрами, принадлежащими оставшейся части цикла C. Получим (u_1, u_2)-путь в графе $G - e$.

$\square$

Число компонет связности

Предложение 4. *Пусть $G = (V, E)$ — граф без петель и кратных ребер с p вершинами, q ребрами и s компонентами связности. Тогда*

1) $s \geqslant p - q$;

2) *если в графе G отсутствуют циклы, то $s = p - q$.*

Число компонет связности

Доказательство. 1. Рассмотрим переход от графа $G_i = (V, E_i)$ к графу $G_{i+1} = G_i + e$, где $E_i \subseteq E$, $e \in E \setminus E_i$. Пусть в графах G_i, G_{i+1} соответственно s_i, s_{i+1} компонет связности. Тогда если ребро e соединяет вершины из одной компоненты связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i$; и если ребро e соединяет вершины из разных компонент связности графа G_i, то $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому

$$s_{i+1} \geqslant s_i - 1.$$

Граф G можно получить из графа $G_0 = (V, \emptyset)$ с p компонентнами связности последовательным добавлением всех ребер множества E. Поэтому $s \geqslant p - q$.

2. Если же в графе G нет циклов, то в предыдущих рассуждениях верно $s_{i+1} = s_i - 1$. Поэтому $s = p - q$.

$\square$

Деревья

Деревом называется связный граф без циклов.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — граф с p вершинами и q ребрами. Тогда следующие утверждения равносильны*:
1) *G — дерево, т. е. связный граф без циклов*;
2) *G — связный граф и $q = p - 1$*;
3) *G — граф без циклов и $q = p - 1$*;
4) *G — граф без циклов, но при соединении любой пары несмежных вершин ребром появляется цикл*;
5) *G — связный граф, но при удалении любого ребра остается несвязный граф*.

Свойства деревьев

Предложение 5.

1. *Любое дерево с* $p \geqslant 2$ *вершинами содержит хотя бы две висячие вершины*.
2. *В любом дереве с* p *вершинами содержит* $q = p - 1$ *ребер*.
3. *В любом дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью*.
4. *Если к дереву добавить ребро, соединяющее его несмежные вершины, то появится ровно один простой цикл*.
5. *Если из дерева удалить ребро, то останется граф с двумя компонентами связности*.

Корневые деревья

Корневым деревом называется пара $(D; v_0)$, где $D = (V, E)$ — дерево, $v_0 \in V$ — выделенная вершина, называемая **корнем**.

При изоморфизме корневых деревьев корень обязан переходить в корень.

Остовные деревья

Остовным деревом графа называется его остовный подграф, являющийся деревом.

Остовные деревья

Предложение 6. *В любом связном графе $G = (V, E)$ найдется остовное дерево.*

Доказательство. (1-й способ). Пусть H — какой-то остовный связный подграф графа G, например, сам граф G.

1) Если в подграфе H нет циклов, то он является остовным деревом графа G.

2) Иначе выберем в графе G произвольное ребро $e \in E$, принадлежащее какому-то циклу подграфа H. Повторим рассуждения 1–2 для остовного подграфа $H - e$, который также является связным.

На каждом шаге разрываем хотя бы один цикл графа H, а циклов конечное число, поэтому через конечное число шагов получим подграф без циклов. Он является остовным деревом графа G.

Остовные деревья

Доказательство. (2-й способ). Пусть H — какой-то остовный подграф графа G без циклов, например, пустой граф, содержащий все вершины графа G.

1) Если подграф H связный, то он является остовным деревом графа G.

2) Иначе выберем в графе G произвольное ребро $e \in E$, соединяющее какие-то вершины из разных компонент связности графа H. Повторим рассуждения 1–2 для остовного подграфа $H + e$, который также без циклов.

На каждом шаге добавляем одно ребро графа G, поэтому через конечное число шагов получим связный подграф. Он является остовным деревом графа G.

Остовные деревья

Доказательство. (3-й способ). Пусть H — какой-то подграф графа G, являющийся деревом, например, подграф из одной вершины графа G.

1) Если подграф H остовный, то он является остовным деревом графа G.

2) Иначе выберем в графе G произвольное ребро $e \in E$, соединяющее какую-то вершину подграфа H с какой-то вершиной графа G, не принадлежащей подграфу H. Повторим рассуждения 1–2 для подграфа $H + e$, который также является деревом.

На каждом шаге добавляем одну вершину графа G, поэтому через конечное число шагов получим остовный подграф. Он является остовным деревом графа G.

$\square$

Число остовных деревьев

Полный граф K_n — граф с n вершинами, в котором любые две различные вершины смежны.

Теорема 2 (Кэли). *В полном помеченном графе K_n найдется ровно n^{n-2} остовных деревьев.*

Доказательство. Пусть $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для каждого остовного дерева $D = D_1$ графа K_n построим его код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

Пусть i_1 — висячая вершина с наименьшим номером в дереве D_1. Она смежна с единственной вершиной j_1.

Повторим рассуждения для дерева $D_2 = D_1 - i_1$ в полном помеченном графе $K_n - i_1$ и т. д.

Останавливаемся, когда получим дерево D_{n-1}, являющееся ребром.

Число остовных деревьев

Доказательство (продолжение). Пусть получен код $k(D_1) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

Как по нему восстановить дерево D_1?

Заметим, что если i не содержится в коде $k(D_1)$, то i — висячая вершина дерева D.

Пусть $V_1 = V$. Выбираем наименьшее число i_1 из V_1, не содержащееся в $k(D_1)$. Соединяем вершины i_1 и j_1. Пусть $V_2 = V_1 \setminus \{i_1\}$.

Повторяем рассуждения для множества V_2 и кода $(j_2, \ldots, j_{n-2})$.

Заметим, что множество V_{n-1} содержит ровно две вершины. Соединим их ребром. Получим дерево D_1.

Число остовных деревьев

Доказательство (продолжение). Значит, число остовных деревьев в графе K_n совпадает с числом кодов $(j_1, \ldots, j_{n-2})$, где $j_1, \ldots, j_{n-2} \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Т. е. число остовных деревьев равно n^{n-2}.

$\square$

Число висячих вершин

Сколько висячих вершин может быть в остовном дереве графа G?

Предложение 7. *В любом связном графе G найдется остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.*

Доказательство. Построим остовное дерево так: сначала выберем вершину $v \in V$ с $d_G(v) = \Delta(G)$ вместе со всеми исходящими из нее ребрами.

Затем к этой звезде так добавим ребра графа G, чтобы не появились циклы. В итоге получим остовное дерево, в котором не менее $\Delta(G)$ висячих вершин.

$\square$

Оценка числа висячих вершин

Теорема 3. *В любом связном графе $G = (V, E)$ с $\delta(G) \geqslant 3$ найдется остовное дерево, в котором не менее $|V|/4$ висячих вершин.*

Доказательство. Опишем алгоритм построения такого остовного дерева.

Пусть дерево D — подграф графа G. Висячую вершину дерева D назовем **устойчивой**, если все смежные с ней вершины принадлежат также дереву D.

Пусть $v(D)$ — число вершин, $u(D)$ — число висячих вершин и $s(D)$ — число устойчивых висячих вершин дерева D.

Положим $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). По индукции построим остовное дерево графа G.

Базис индукции: выберем в графе G произвольную вершину v. Пусть дерево D_1 состоит из вершины v вместе со всеми исходящими из нее ребрами и их вторыми концами.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$ и $d_G(v) \geqslant 3$, верно

$$\alpha(D_1) \geqslant 3d_G(v)/4 - (d_G(v) + 1)/4 \geqslant 5/4.$$

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). Пусть уже построено дерево $D_i = (V_i, E_i)$, и $W = V \setminus V_i$.

1. Если в дереве D_i найдется невисячая вершина v, смежная с некоторой вершиной $w \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 1/4 = 1/2.$$

Оценка числа висячих вершин

2. Иначе, если в дереве D_i найдется вершина v, смежная хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w_1) + (v, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 2 \cdot (1/4) = 1/4.$$

Оценка числа висячих вершин

3. Иначе, если в дереве D_i найдется вершина v, смежная с какой-то вершиной $w \in W$, которая, в свою очередь, смежна хотя бы с двумя вершинами $w_1, w_2 \in W$, то пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w) + (w, w_1) + (w, w_2)$.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 3/4 - 3 \cdot (1/4) = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

4. Иначе, если в дереве D_i найдется вершина v, смежная с какой-то вершиной $w \in W$, то, т. к. п. 3 не выполняется, вершина w смежна не более чем с одной вершиной из W. Но $d_G(w) \geqslant 3$, поэтому вершина w смежна хотя бы с двумя вершинами $v, v_1 \in V_i$. Пусть $D_{i+1} = D_i + (v, w)$. Т. к. п.п. 1–2 не выполняются, вершина v_1 — висячая в дереве D_i и смежна ровно с одной вершиной из множества W, а именно, с вершиной w. Поэтому в дереве D_{i+1} висячая вершина v_1 — устойчивая.

Тогда, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D_{i+1}) - \alpha(D_i) \geqslant 1/4 - 1/4 = 0.$$

Оценка числа висячих вершин

5. Если п.п. 1–4 нельзя применить, то остовное дерево D построено.

Оценка числа висячих вершин

Доказательство (продолжение). В остовном дереве D все висячие вершины устойчивые.

Поэтому, т. к. $\alpha(D) = 3u(D)/4 + s(D)/4 - v(D)/4$, верно

$$\alpha(D) = u(D) - v(D)/4.$$

Или

$$u(D) = |V|/4 + \alpha(D).$$

Но $\alpha(D) \geqslant \alpha(D_1) \geqslant 5/4$, т. к. на каждом шаге построения мы только увеличивали этот параметр.

Получаем, что

$$u(D) \geqslant |V|/4.$$

$\square$

Задачи

1. Найти число неизоморфных графов $G = (V, E)$ (без петель к кратных ребер), если

1) $|V| = 4$;
2) $|V| = 5$ и G — несвязный граф без изолированных вершин;
3) $|V| = 6$, $|E| = 7$ и в G ровно 2 висячие вершины;
4) $|V| = 6$, $|E| = 12$.

Изобразить эти неизоморфные графы.

2. Найти число неизоморфных деревьев $D = (V, E)$, если

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 висячие вершины;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 висячие вершины.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

3. Найти число неизоморфных корневых деревьев $(D; v_0)$, $D = (V, E)$, $v_0 \in V$, если

1) $|V| = 3$;
2) $|V| = 4$;
3) $|E| = 6$ и в D ровно 3 висячие вершины;
4) $|E| = 6$ и в D ровно 4 висячие вершины.

Изобразить эти неизоморфные корневые деревья.

4. Найти число неизоморфных остовных

а) деревьев; б) корневых деревьев в графе G, если

1) $G = K_3$;
2) $G = K_4$;
3) $G = K_4 - e$, где e — произвольное ребро графа K_4;
4) $G = K_{2,3}$.

Изобразить эти неизоморфные деревья.

Задачи

5. В дереве D ровно 156 вершин степени 4, остальные вершины — степени 1 или 2. Найти число вершин степени 1 в дереве D.

6. Связный граф G содержит 295 висячих вершин, остальные его вершины имеют степень 2 или 3. Кроме того, в графе G ровно один цикл. Найти число вершин степени 3 в графе G.

7. Сформулировать определение изоморфизма для псевдографов.

8. Верны ли предложения 1–4

1) для мультиграфов;
2) для псевдографов?

Если верны, то обосновать; если не верны, то указать, как надо изменить формулировки, чтобы они стали верными.

Литература к лекции

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. С. 9–11, 17, 22–25, 26–27, 53–55.

2. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. С. 22–28, 48–51.