

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 18

Системы дизъюнктов

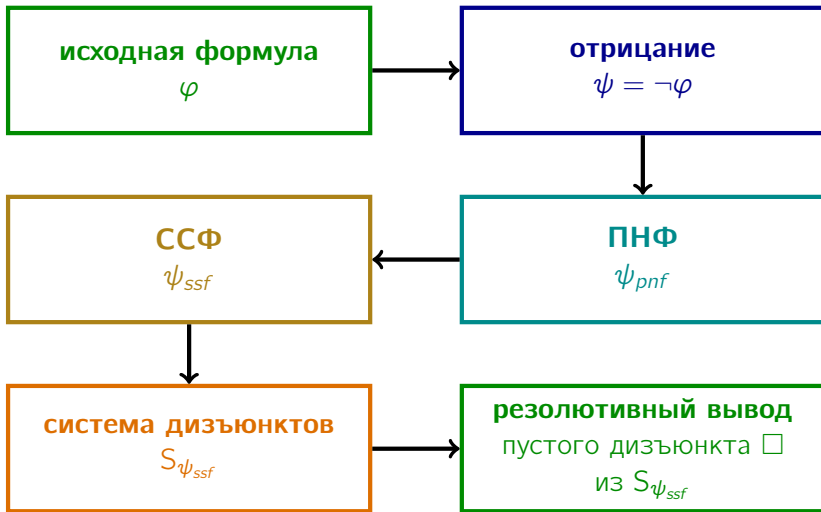
Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

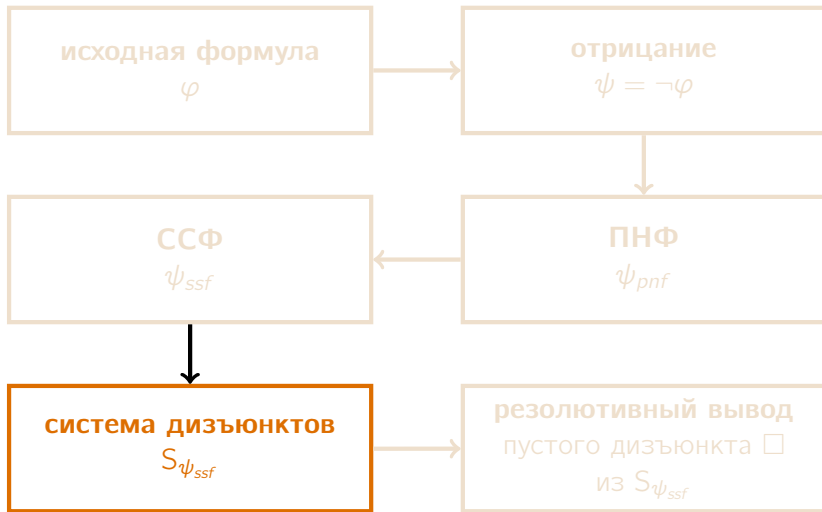
E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k),$$

где L_i — **литера** (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \tilde{x}^n (L_1 \vee \dots \vee L_k) = L_1 \vee \dots \vee L_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем отождествлять дизъюнкт с **мультимножеством** его литер:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k = \{L_1, \dots, L_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например:

(но это **только** при обсуждении дизъюнктов)

$$\forall x (P(x) \vee P(x) \vee Q(\mathbf{f}(\mathbf{c})))$$

=

$$P(x) \vee P(x) \vee Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$$

=

$$\{P(x), P(x), Q(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$$

=

$$P(x) \vee Q(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee P(x)$$

=

$$\forall x (P(x) \vee Q(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \vee P(x))$$

Системы дизъюнктов

Пустой дизъюнкт \square — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое мультимножество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$L_1 \vee \dots \vee L_k \llsim L_1 \vee \dots \vee L_k \vee f, \text{ а значит, } \square \llsim f$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Система дизъюнктов S **выполнима** ($\models S^1$),
если она имеет хотя бы одну модель,
и **невыполнима** ($\not\models S$) иначе

1 Как и раньше, это обозначение не следует использовать вне этого курса

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall x (\varphi \& \psi) \sim \forall x \varphi \& \forall x \psi$

Доказательство. Очевидно?

(Обосновать эту равносильность настолько же просто, как и все *основные равносильности*)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)

Для ССФ с любым набором множителей D_1, \dots, D_k верно:

$$\models \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \quad \Leftrightarrow \quad \models \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\}$$

Доказательство

По утверждению выше, $\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k) \sim \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k$

Следовательно, с учётом семантики $\&$,

$$\models \forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

$$\Leftrightarrow \models \forall \tilde{x}^n D_1 \& \dots \& \forall \tilde{x}^n D_k$$

$$\Leftrightarrow \models \{\forall \tilde{x}^n D_1, \dots, \forall \tilde{x}^n D_k\} \quad \blacktriangledown$$

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\models \forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(f(x)) \vee R(x, g(x))) \& \neg R(x, u))$$

\Leftrightarrow

$$\models \{P(x), \quad \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$