Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 9

Подстановки
(основные определения)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

($\models \varphi \quad \Leftrightarrow$ семантическая таблица $\langle \mid \varphi \rangle$ невыполнима)

Чтобы научиться проверять общезначимость формул,
достаточно придумать правила преобразования таблиц,
позволяющие извлекать «явные противоречия» (закрытые таблицы)
из таблиц, содержащих «неявные противоречия» (невыполнимых)

Для примера рассмотрим такую невыполнимую таблицу:

$$\langle \forall x\, P(x) \mid P(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы преобразовать эту таблицу в закрытую, достаточно заметить,
что если утверждение $P(x)$ выполняется для любого предмета x, то оно
выполняется, в частности, и для предмета, обозначенного константой $\mathbf{c}$

Значит, можно подставить на место x константу $\mathbf{c}$
и получить выполнимость утверждения $P(\mathbf{c})$

Добавив это утверждение в левую часть, получим закрытую таблицу:

$$\langle \forall x\, P(x), P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c}) \rangle$$

Чтобы строго сформулировать соответствующее правило,
следует строго определить, что такое «подставить»

Подстановки

Пусть заданы множество переменных Var и множество термов Term

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i, \qquad 1 \leq i \leq n$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула) логики предикатов и θ — подстановка

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \dots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \mathbin{\&} \psi)\theta = (\varphi\theta \mathbin{\&} \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}), \text{ если } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Иными словами, $E\theta$ получается из выражения E так:

- E — терм $\Rightarrow$ все вхождения переменных заменяются на их θ-образы
- E — формула $\Rightarrow$ все **свободные** вхождения переменных заменяются на их θ-образы

Подстановки

Пример применения подстановки к формуле

$\varphi = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$
$\theta = \{\mathrm{x}/\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}), \mathrm{y}/\mathrm{x}, \mathrm{z}/\mathbf{f}(\mathrm{z})\}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathrm{x})) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Все выделенные вхождения заменяются согласно θ

$\varphi\theta = \forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathrm{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathrm{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}) \vee \mathrm{R}(\mathrm{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathrm{x}) = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то у x тоже есть дед»

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

$\varphi(\mathrm{x})\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\} = \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathrm{y})$

«если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед»

Очевидно, что $\not\models \varphi(\mathrm{x})\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная x свободна для терма t в формуле φ, если
ни одно свободное вхождение переменной x не лежит
в областях действия кванторов, связывающих переменные из Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathrm{x}_1/t_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ,
если для каждой связки $\mathrm{x}_\mathrm{i}/t_i$
переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ

Например, для формулы $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u},\mathrm{v})\}$ — правильная:
  все вхождения u и v в подставляемый терм свободны
- подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ — неправильная:
  вхождение y в подставляемый терм оказывается связанным

Подстановки

Утверждение (о семантике правильной подстановки)

Для любых формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}, \mathtt{x})$, интерпретации $\mathcal{I}$, набора предметов $\widetilde{d}^n$ и подстановки $\{\mathtt{x}/t(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})\}$, правильной для φ, верно:

$$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d}^n, t[\widetilde{d}^n]] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\{\mathtt{x}/t\}[\widetilde{d}^n]$$

Доказательство. Можете попробовать сами,
а здесь ограничимся небольшим **примером**

Пусть $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \in \mathrm{Const}$, $=^{(2)} \in \mathrm{Pred}$, $+^{(1)} \in \mathrm{Func}$ и все эти символы имеют «естественную» арифметическую оценку в $\mathcal{I}$: $\overline{\mathbf{1}} = 1$, $\overline{\mathbf{2}} = 2$, $\overline{\mathbf{3}} = 3$, $\overline{=}$ и $\overline{+}$ — отношение равенства и операция сложения чисел

Тогда верно следующее:

$$\mathcal{I} \models (\mathbf{1} + \mathtt{y} = \mathbf{3})[\mathtt{y}/2]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \text{(утверждение выше)}$$

$$\mathcal{I} \models (\mathtt{x} = \mathbf{3})[\mathtt{y}/2, \mathtt{x}/((\mathbf{1} + \mathtt{y})[\mathtt{y}/2])]$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\overline{\mathbf{3}} = 3 = (\mathbf{1} + \mathtt{y})[\mathtt{y}/2])$$

$$\mathcal{I} \models (\mathtt{x} = \mathbf{3})[\mathtt{y}/2, \mathtt{x}/3]$$