Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Осенний семестр 2023–2024 уч. г.
группы 311–319

Лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.ru)

Информационная поддержка курса:
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)

I. Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ

Утверждение 1.1. Совершенная ДНФ ФАЛ f, $f \not\equiv 0$, $f \in P_2(\boldsymbol{n})$, является единственной ДНФ от БП $X(\boldsymbol{n})$, которая реализует эту ФАЛ, тогда и только тогда, когда во множестве N_f нет соседних наборов.

Следствие. Совершенная ДНФ ФАЛ ℓ, $\overline{\ell}$, является единственной ДНФ этой ФАЛ от БП $X(\boldsymbol{n})$.

2. Сокращенная ДНФ и способы ее построения

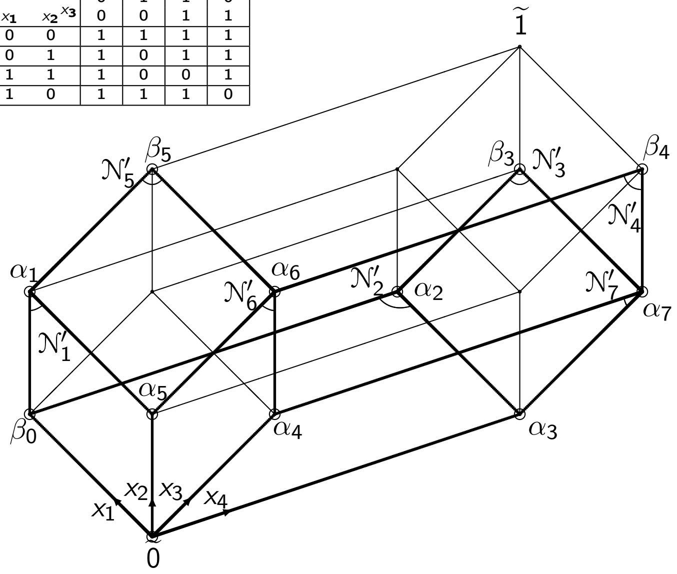
Утверждение 2.1. Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращенные ДНФ ФАЛ f' и f'' соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

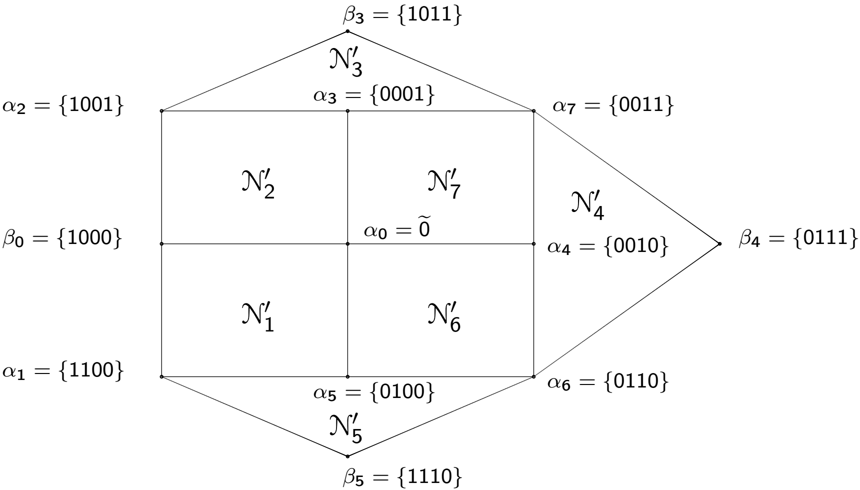
Следствие. Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ f в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ f.

Утверждение 2.2. ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие. Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

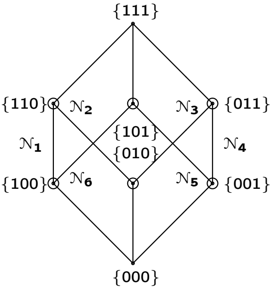
	x_4	0	1	1	0
x_1	x_2 x_3	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0





$$\mathfrak{A}_1' = K_1' \vee K_3' \vee K_4' \vee K_5', \quad \mathfrak{A}_2' = K_2' \vee K_3' \vee K_4' \vee K_5'.$$

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\overline{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{K_6}.$$



$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$
$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee, K_4 \vee K_5,$$
$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$
$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

3. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в ДНФ сумма тупиковых, его локальность

Утверждение 3.1. Дизъюнктивная нормальная форма $\cap T$ ФАЛ f состоит из тех простых импликант ФАЛ f, которые соответствуют ядровым граням этой ФАЛ.

Следствие. Сокращенная ДНФ ФАЛ f является ее единственной тупиковой ДНФ тогда и только тогда, когда f — *ядровая* ФАЛ, т.е. все ее максимальные грани входят в ядро.

Утверждение 3.2. Простая импликанта K ФАЛ f входит в ДНФ ΣT тогда и только тогда, когда грань N_K не является регулярной гранью этой ФАЛ.

4. Особенности ДНФ линейных и монотонных функций. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ

Утверждение 4.1. Сокращенная ДНФ $\mathfrak{A}$ монотонной ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, является единственной тупиковой ДНФ этой ФАЛ и имеет вид:

$$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\beta \in N_f^+} K_\beta^+(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом все наборы из N_f^+ являются ядровыми точками ФАЛ f.

Следствие. Монотонная ФАЛ является ядровой ФАЛ.

Утверждение 4.2. Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы M, $M \in B^{p,s}$, без нулевых столбцов задается КНФ вида:

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \Bigg(\bigvee_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ M\langle i,j\rangle = 1}} y_i \Bigg).$$

Следствие. В результате раскрытия скобок и приведения подобных из этой КНФ можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы M.

5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о протыкающих наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ

Утверждение 5.1 Пусть для действительного γ, $0 < \gamma \leqslant 1$, в каждом столбце матрицы M, $M \in B^{p,s}$, имеется не меньше, чем $\gamma \cdot p$, единиц. Тогда покрытие матрицы M, получаемое с помощью градиентного алгоритма, имеет длину не больше, чем

$$\left\lceil \frac{1}{\gamma} \ln^{+}(\gamma s) \right\rceil + \frac{1}{\gamma},$$

$$\text{где } \ln^{+} x = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Утверждение 5.2 При любых натуральных n и m, $m \leqslant n$, в кубе B^n всегда найдется подмножество мощности не более, чем $n \cdot 2^m$, протыкающее все грани ранга m.

6. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров. Теорема Ю. И. Журавлева о ДНФ сумма минимальных

Утверждение 6.1 Для любого $n, n \in \mathbb{N}$, имеют место соотношения

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, R(n) = n \cdot 2^{n-1}.$$

Утверждение 6.2 Число тупиковых (минимальных) ДНФ у ФАЛ f из $P_2(n)$, $n \geqslant 4$, вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, x_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n),$$

где $\overline{N}_g = \{(000), (111)\}$, равно $5^{2^{n-4}}$ (соответственно $2^{2^{n-4}}$).

Следствие

$$\tau(n) \geqslant 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(n) \geqslant 2^{2^{n-4}}.$$

Утверждение 6.3

$$\lambda_{\text{сокр.}}(n) \geqslant e_1 \frac{3^n}{n},$$

где e_1 — некоторая константа.

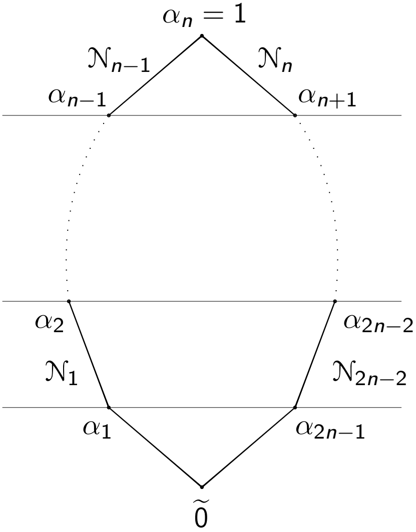


Рис.: цепная ФАЛ длины $(2n-2)$ в кубе B^n

Утверждение 6.4 При любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, в $P_2(n)$ существуют ФАЛ f' и f'', имеющие общую простую импликанту K, которая входит в ДНФ ΣM одной, но не входит в ДНФ ΣM другой из этих ФАЛ и для которой $S_{n-3}(N_K, f') = S_{n-3}(N_K, f'')$.

Замечание 1 Из теоремы следует, что критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣM не имеет такого локального характера, как критерий вхождения ЭК в ДНФ ΣT.

Замечание 2 Известно, что при $n \geqslant 14$ в $P_2(n)$ имеется цепная ФАЛ четной длины $t,\ t \geqslant 2^{n-11} - 4$, на основе которой справедливость теоремы можно установить для окрестности порядка $(\frac{t}{2} - 2)$.