Решение задач семинара №6 по курсу “Основы кибернетики”
для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.
Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов для КС и СФЭ.

Задача №2.13(1)

Построить методом каскадов контактную схему (КС) для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1$.

Решение:

Руководствуясь естественным порядком переменных, разложим по Шеннону сначала саму ФАЛ f по её первой переменной, и далее продолжим раскладывать её подфункции по последующим переменным. Пусть $G_1 = \widehat{G}_1 = \{f\}$ — исходное множество функций, для которых методом каскадов нужно построить схемы. Разложение Шеннона функции f по переменной x_1 выглядит так:

$$f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot (x_2x_3 \oplus 1) \vee x_1 \cdot 1$$

Введём удобные обозначения. Пусть k и n натуральные числа, $k \leqslant n$, функция g — ФАЛ из $P_2(n)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — двоичный набор длины k. Будем далее обозначать функцию $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ или даже через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$, когда число n ясно из контекста. Заметим, что ФАЛ $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$ *зависит* в точности от переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$, при этом, возможно, от некоторых из них *зависимость фиктивная*. В нашем случае $f_0(x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus 1$, $f_1(x_2, x_3) = 1$ и эти две ФАЛ составляют множество $G_2 = \{f_0, f_1\}$. На следующем шаге мы имеем целью разложить функции множества G_2 по переменной x_2 и таким способом построить множество функций G_3. Для дальнейшего не имеет смысла раскладывать ФАЛ по переменной, если зависимость от этой переменной фиктивная (проверьте, что в этом случае полученные подфункции *совпадают* между собой и *равны*[1] исходной ФАЛ). Поэтому выделим из множества G_2 его подмножество $\widehat{G}_2 = \{f_0\}$ тех функций, которые существенно зависят от переменной x_2, и выпишем разложения Шеннона этих функций (в рассматриваемом примере функция одна):

$$f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, \qquad \text{где} \quad f_{00} = 1, \quad f_{01} = x_3 \oplus 1 = \overline{x}_3.$$

Далее планируется раскладывать полученные функции по переменной x_3, но в этом месте нельзя забыть про функции множества $G_2 \setminus \widehat{G}_2$, которые были временно «отложены» как не зависящие существенно от переменной x_2, но в общем случае могут зависеть от переменной x_3: $G_3 = \{f_{00}, f_{01}\} \cup (G_2 \setminus \widehat{G}_2) = \{1, \overline{x}_3\}$, $\widehat{G}_3 = \{f_{01}\} = \{\overline{x}_3\}$. Раскладываем функцию f_{01} по переменной x_3:

$$f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, \qquad \text{где} \quad f_{010} = 1, \quad f_{011} = 0.$$

Таким образом, $G_4 = \{f_{010}, f_{011}\} \cup (G_3 \setminus \widehat{G}_3) = \{0, 1\}$. Будем считать, что $\widehat{G}_4 = G_4$.

---

[1]В этом месте очень тонкий момент. Равенство ФАЛ определяется с точностью до фиктивных переменных, тем не менее, например, функция-константа как функция двух переменных требует иного количества входных данных, чем та же самая функция, но рассматриваемая с зависимостью лишь от одной переменной — у этих функций не совпадают области определения. Поэтому как за математическими объектами за такими функциями приходится признать *несовпадение*, однако в синтезной проблематике их существо едино: с точки зрения результата — самого закона управления — безразлично, присутствует ли в управляющей конструкции элемент управления фиктивного параметра системы. Поэтому удобно говорить про *равенство* таких функции.

Здесь уместно напомнить, что извлекая закон управления по описанию управляющей системы, по определению считается, что он зависит (не обязательно существенно!) от тех и только тех параметров, которые в этом описании присутствуют. Например, заданная формулой $(x \cdot \overline{x} \vee y)$ функция зависит от двух переменных, а формула $(y \cdot \overline{y} \vee y)$ задаёт функцию одной переменной.

Результатом данного процесса явилось разбиение $(\widehat{G}_2, \widehat{G}_3, \widehat{G}_4)$ множества всех подфункций функций из G_1 на непересекающиеся классы. При этом для любого j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, любая ФАЛ h из G_j либо является некоторой ФАЛ множества $H_j = \bigcup_{s=j+1}^{4} \widehat{G}_s$ «следующих» классов разбиения, либо для некоторых ФАЛ $h', h'' \in H_j$ представима в виде $h = \overline{x}_j \cdot h' \vee x_j \cdot h''$. Каскадная схема строится итеративно, начиная с «последнего» множества разбиения. Схема, полученная на предыдущей итерации, «надстраивается» элементами, моделирующими указанное представление ФАЛ h.

Процесс построения $(2,1)-$ полной каскадной контактной схемы Σ, реализующей матрицу (в нашем случае — вектор-столбец) проводимости $(f, \overline{f})^{\intercal}$, изображён на рис. 1. Каскадная КС Σ_f для ФАЛ f получается из схемы Σ удалением входного полюса 0 вместе со всеми инцидентными ему контактами, а инверсная к ней каскадная КС $\Sigma_{\overline{f}}$ для ФАЛ $\overline{f}$ — удалением входного полюса 1.

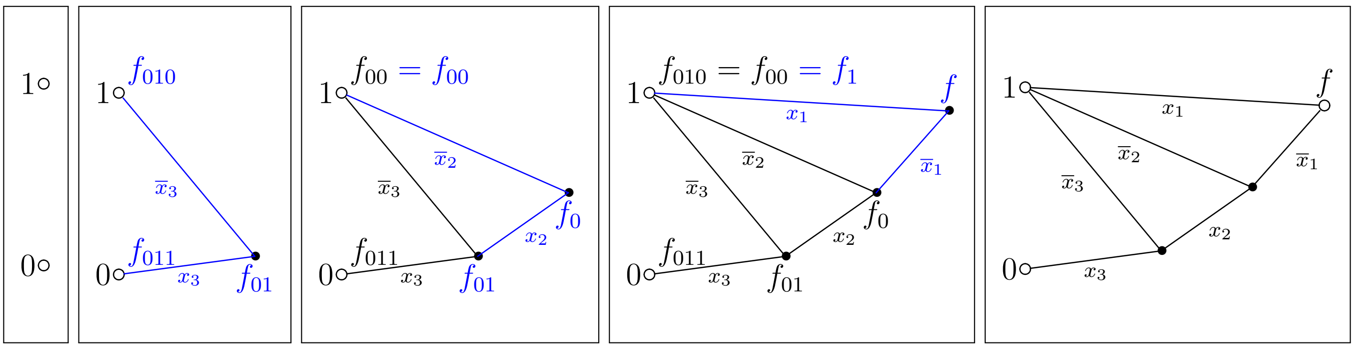


Рис. 1. Построение полной каскадной КС

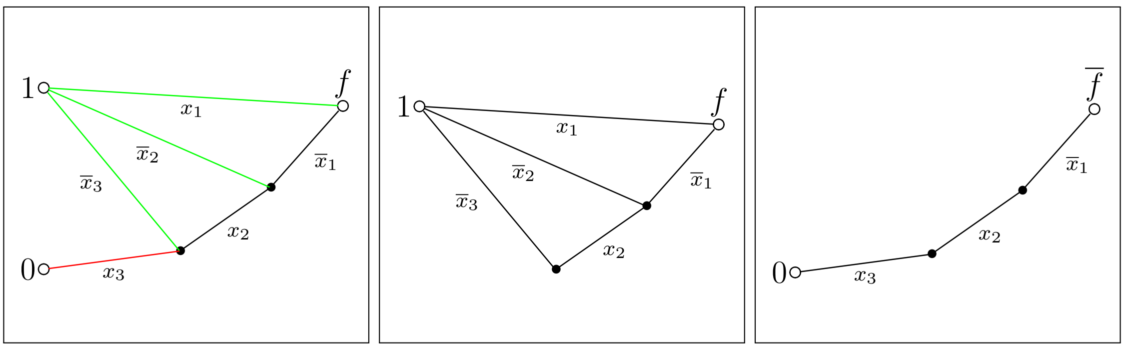


Рис. 2. Каскадная КС Σ_f, реализующая ФАЛ f и инверсная к ней схема $\Sigma_{\overline{f}}$

Задача №2.13(7)

Построить методом каскадов контактную схему для функции $f(\tilde{x}^3) = (0000\,0001\,0111\,1111)$.

Решение:

По аналогии с разобраным примером, построим разложения функции f:

$$G_1 : \Big\{ f = \overline{x}_1 \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, \qquad f_0 = (0000\,0001), \qquad f_1 = (0111\,1111); \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_1 \cdot f_{01}, & f_{00} = (0000) = 0, \quad f_{01} = (0001), \\ f_1 = \overline{x}_2 \cdot f_{10} \vee x_1 \cdot f_{11}, & f_{10} = (0111), \quad f_{11} = (1111) = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3 : \begin{cases} f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, & f_{010} = (00) = 0, \quad f_{011} = (01) = x_4, \\ f_{10} = \overline{x}_3 \cdot f_{100} \vee x_3 \cdot f_{101}, & f_{100} = (01) = x_4, \quad f_{101} = (11) = 1, \\ f_{011} = f_{100} = \overline{x}_4 \cdot 0 \vee x_4 \cdot 1. \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = G_3 \setminus \{f_{00}, f_{11}\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 4. На рис. 4 изображена каскадная КС для ФАЛ f и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной КС, удаление которых приводит к этим схемам.

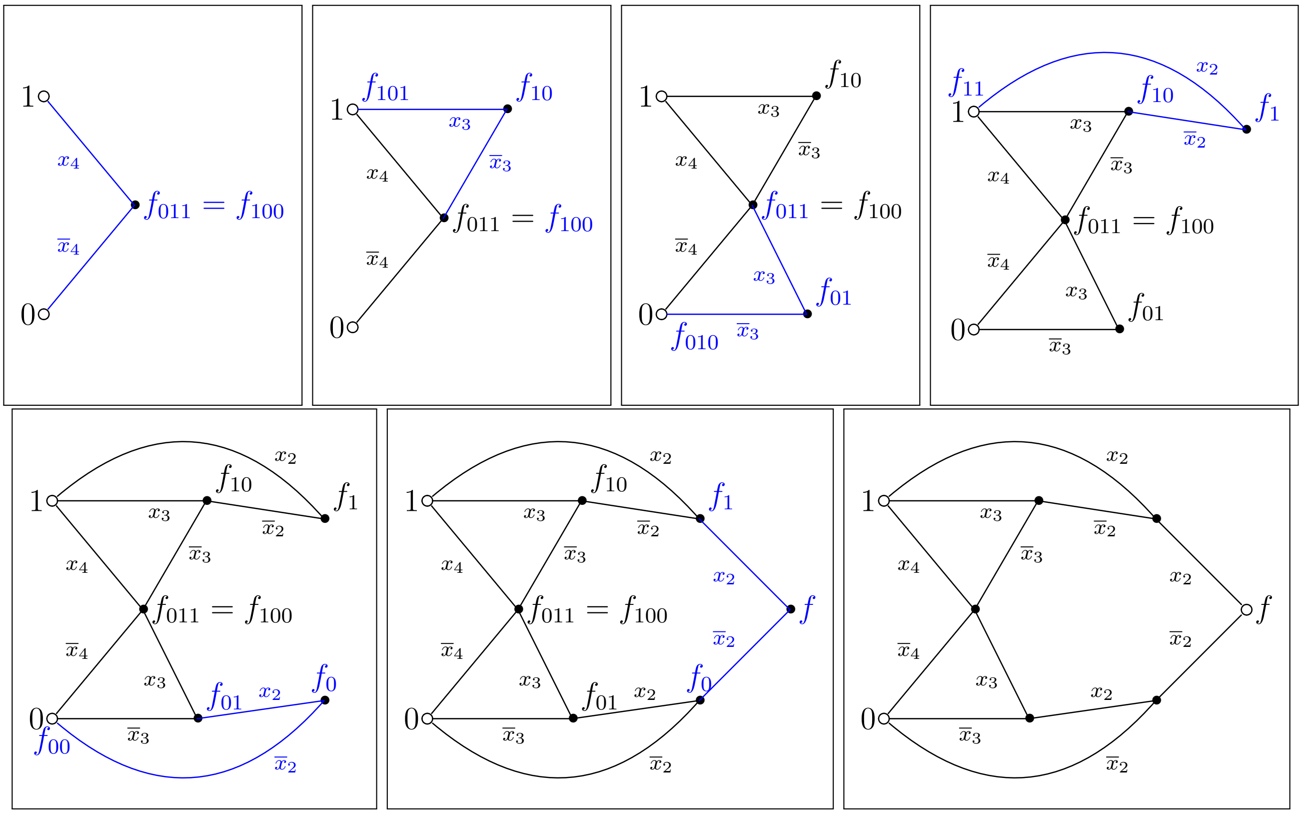


Рис. 3. Построение полной каскадной КС

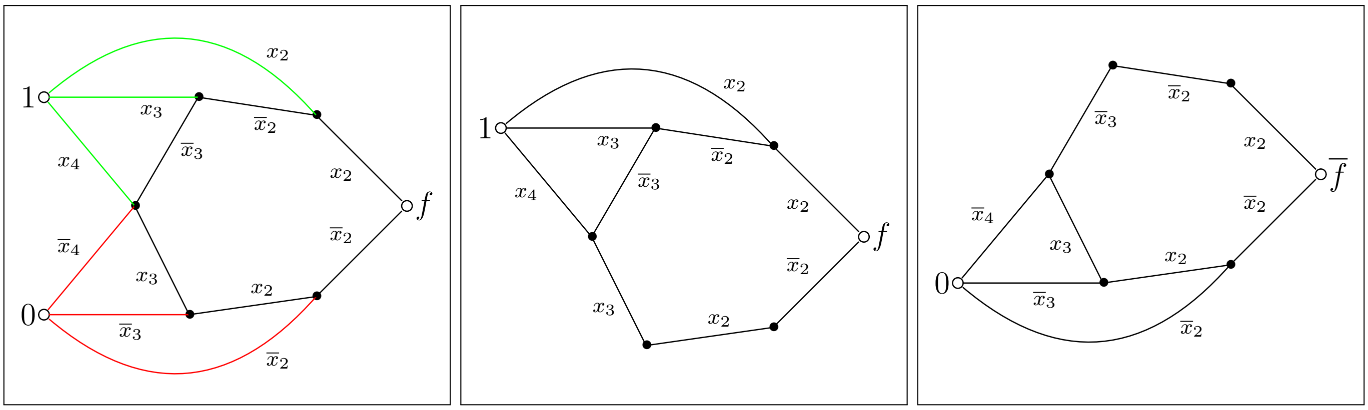


Рис. 4. Получение каскадной КС для f и инверсной КС из полной каскадной КС

Задача №2.14(1)

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x \cdot y$, $g = x \vee y$.

Решение:

Построим разложения функций f, g:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x} \cdot f_0 \vee x \cdot f_1, & f_0 = 0, \quad f_1 = y, \\ g = \overline{x} \cdot g_0 \vee x \cdot g_1, & g_0 = y, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_1 = g_0 = y = \overline{y} \cdot 0 \vee y \cdot 1, \\ f_0 = 0, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = \{y\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 5. На рис. 6 изображена каскадная КС для системы ФАЛ Ф и инверсная схема.

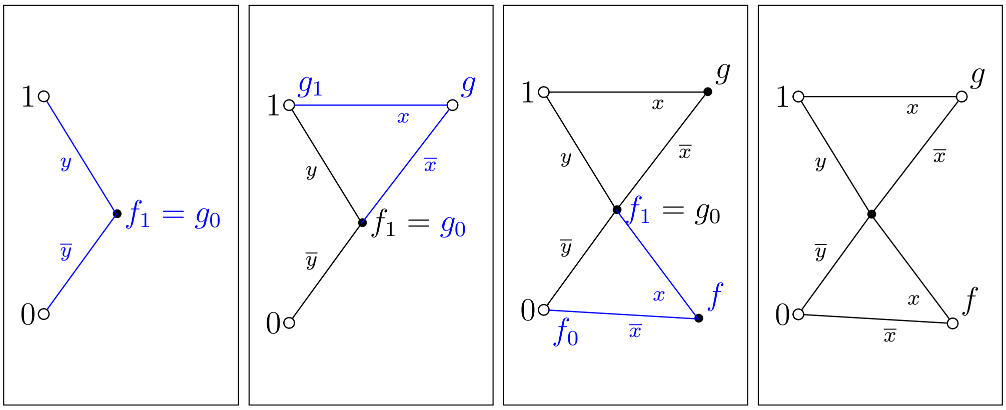


Рис. 5. Построение полной каскадной КС

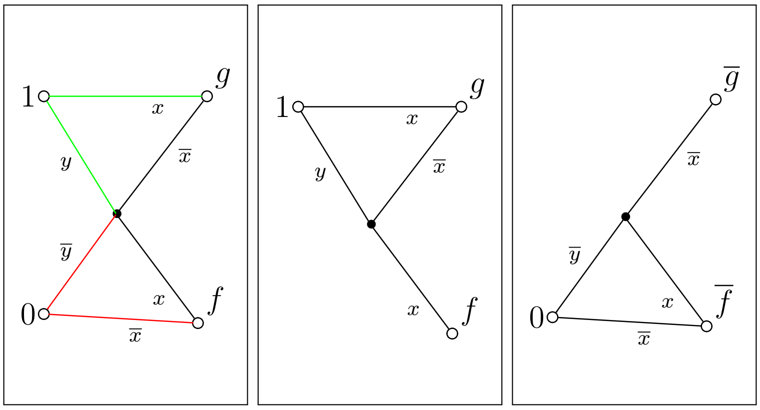


Рис. 6. Получение каскадной КС для системы Ф и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

Задача №2.14(5)

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $g = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2$.

Решение:

Построим разложения функций f, g:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x_1} \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, & f_0 = x_2 \oplus x_3, \quad f_1 = 1 \oplus x_2 \oplus x_3, \\ g = \overline{x_1} \cdot g_0 \vee x_1 \cdot g_1, & g_0 = x_2 x_3, \quad g_1 = x_3 \vee x_2; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_0 = \overline{x_2} \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, & f_{00} = x_3, \quad f_{01} = 1 \oplus x_3 = \overline{x}_3, \\ f_1 = \overline{x_2} \cdot f_{10} \vee x_2 \cdot f_{11}, & f_{10} = \overline{x}_3 = f_{01}, \quad f_{11} = x_3, \\ g_0 = \overline{x_2} \cdot g_{00} \vee x_2 \cdot g_{01}, & g_{00} = 0, \quad g_{01} = x_3, \\ g_1 = \overline{x_2} \cdot g_{10} \vee x_2 \cdot g_{11}, & g_{10} = x_3, \quad g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3 : \begin{cases} g_{01} = g_{10} = f_{00} = f_{11} = \overline{x_3} \cdot 0 \vee x_3 \cdot 1, \\ f_{01} = f_{10} = \overline{x_3} \cdot 1 \vee x_3 \cdot 0, \\ g_{00} = 0, \quad g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = \{\overline{x}_3, x_3\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС для системы Ф изображён на рис. 7. На рис. 8 изображена каскадная КС для системы Ф и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной

КС, удаление которых приводит к этим схемам. Построение схемы из функциональных элементов методом каскадов для системы Ф проиллюстрированно на рисунках 9, 10.

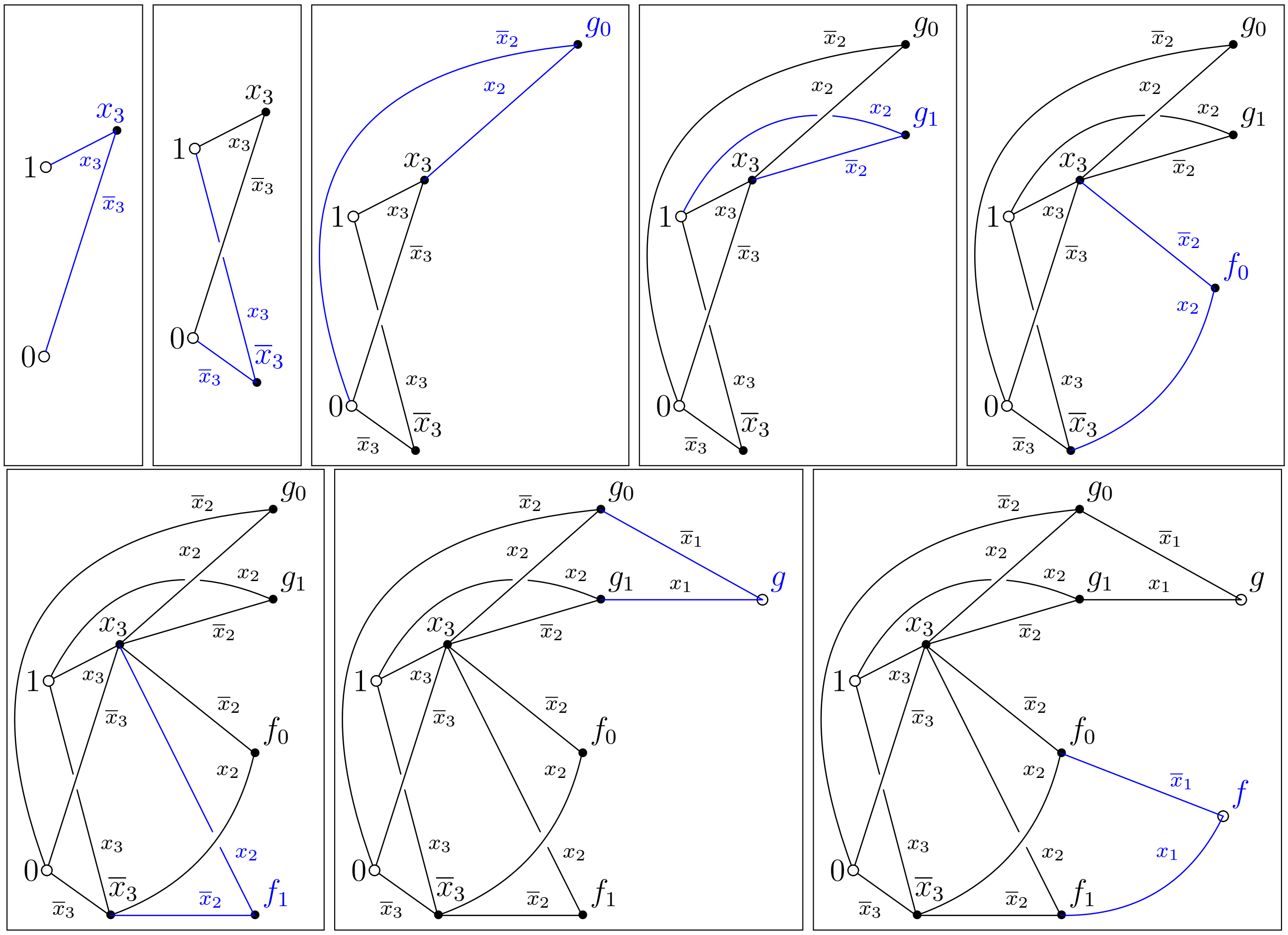


Рис. 7. Построение полной каскадной КС

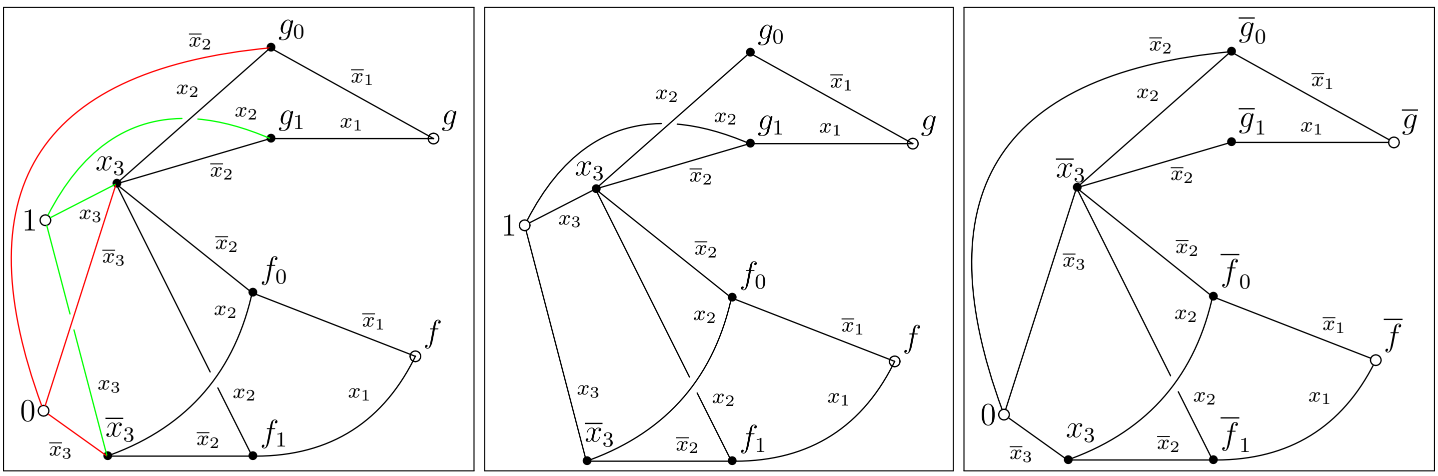


Рис. 8. Получение каскадной КС для системы Ф и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

Список литературы

[1] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

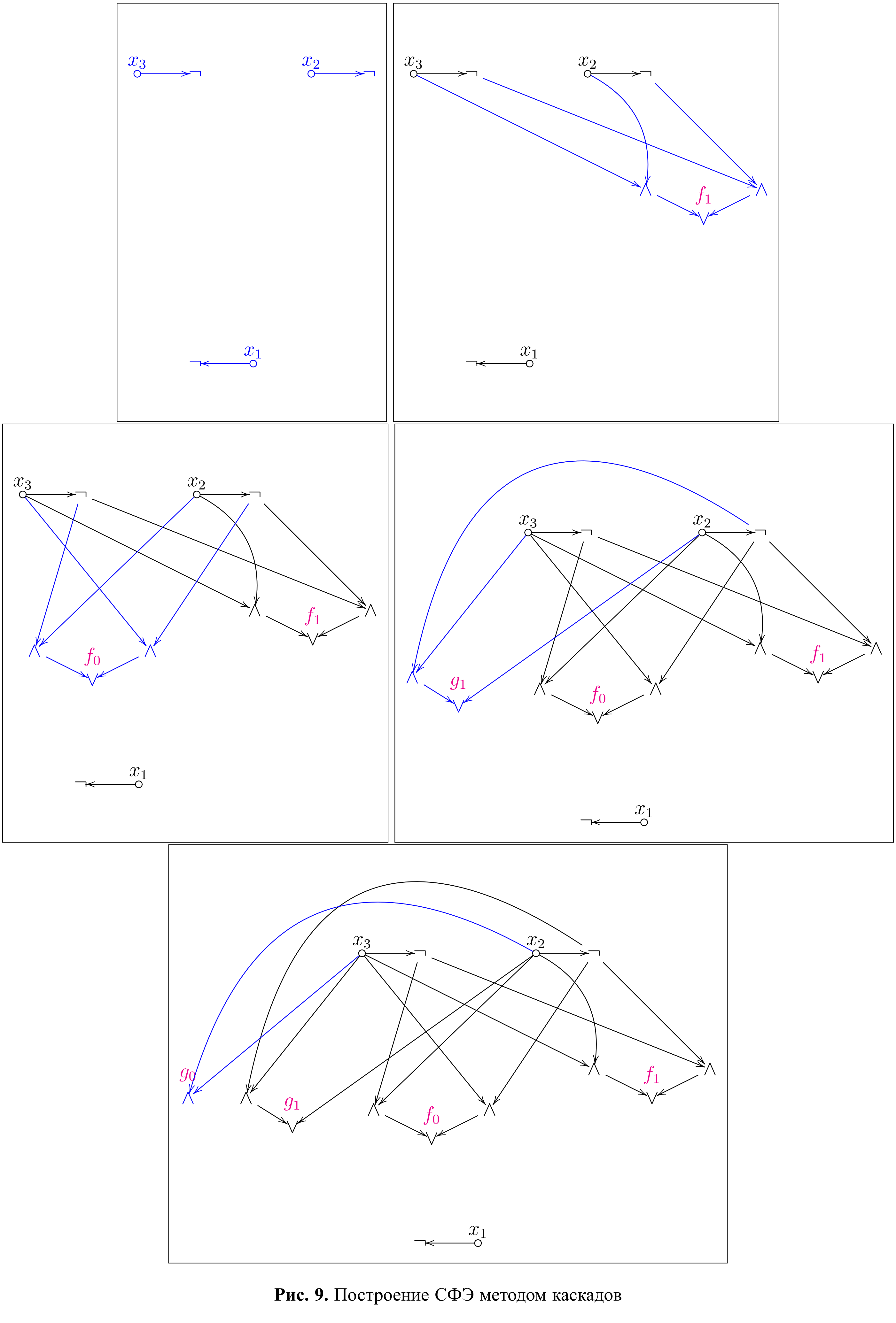


Рис. 9. Построение СФЭ методом каскадов

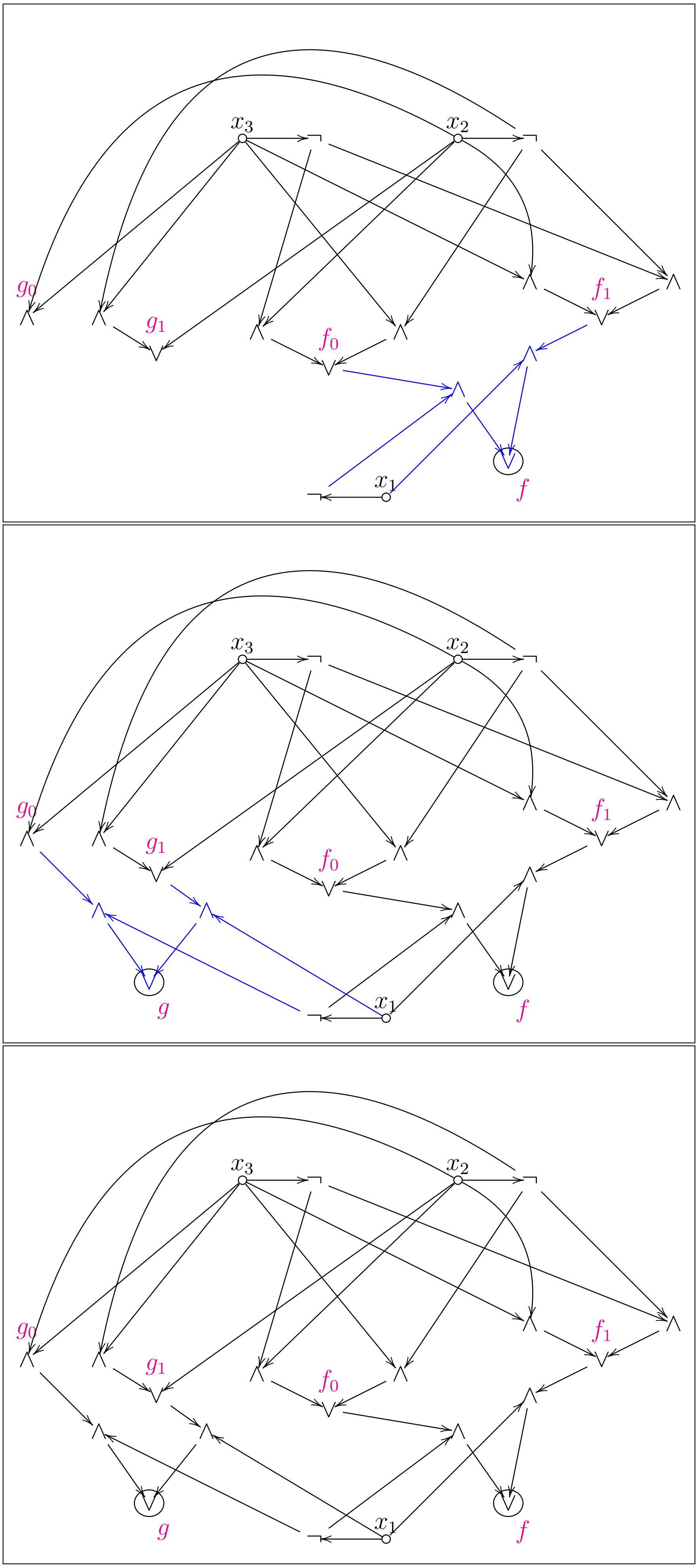


Рис. 10. Построение СФЭ методом каскадов (продолжение)

Метод Шеннона и инверсные контактные схемы.

Метод Шеннона синтеза контактных схем заключается в следующем. Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Выбирается q, $1 \leqslant q \leqslant n$, и функция раскладывается по первым q переменным (вообще говоря, можно раскладывать не обязательно по первым, а по любым выбранным q переменным):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_q \in \{0,1\}} x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q} \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_q, x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

2. Чтобы теперь построить схему, нужно сначала реализовать все элементарные конъюнкции вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$. Это делается с помощью контактного дерева от переменных $x_1, \ldots, x_q$.

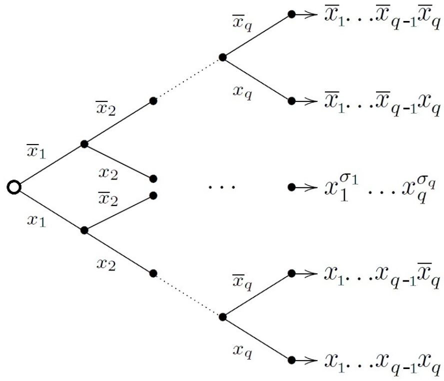


Рис. 1: Контактное дерево.

3. Теперь реализуем все функции вида $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_q, x_{q+1}, \ldots, x_n)$. Эти функции зависят от $n - q$ переменных и, вообще говоря, могут быть любыми. Поэтому приходится реализовывать так называемый универсальный многополюсник порядка $(n - q)$ – схему $U_{n-q}(x_{q+1}, \ldots, x_n)$, реализующую *все* функции от $(n - q)$ переменных. Эта схема имеет 1 вход и $2^{2^{n-q}}$ выходов — по числу функций от $(n - q)$ переменных.

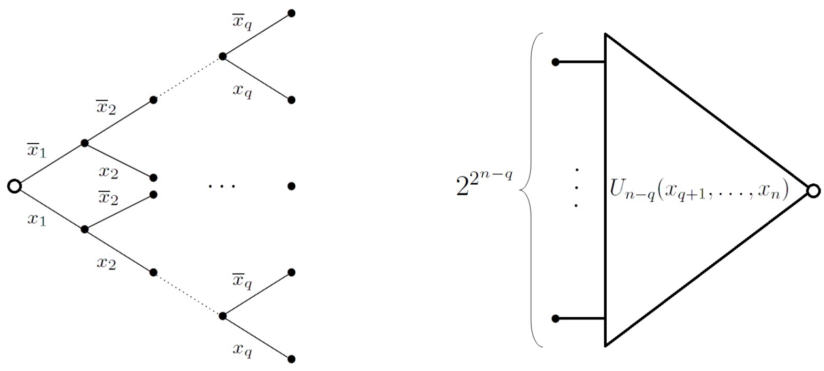


Рис. 2: Контактное дерево и универсальный многополюсник.

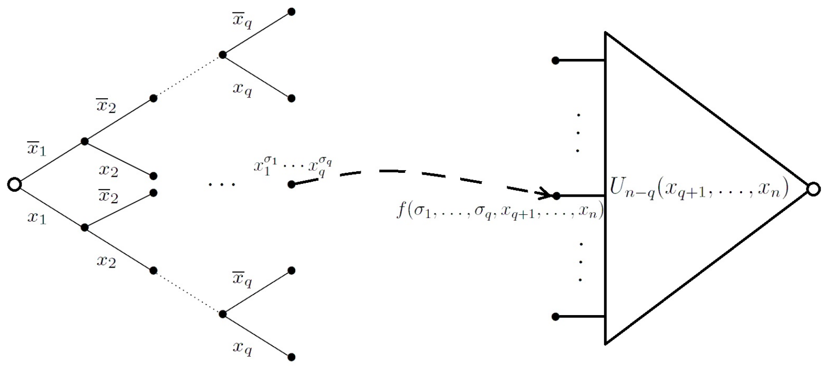


Рис. 3: К пункту 4.

4. Теперь для получения схемы по методу Шеннона осталось подсоединить каждую конъюнкцию $x_1^{\sigma_1}\cdots x_q^{\sigma_q}$ к соответствующей подфункции $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_q,x_{q+1},\ldots,x_n)$, а лишние висячие ребра убрать.

Можно считать, что универсальный многополюсник не имеет выхода, соответствующего функции 0. Поэтому **универсальный многополюсник порядка 1** в случае контактных схем имеет три выхода (на которых реализуются функции 1, x_1, $\bar{x}_1$) и выглядит следующим образом:

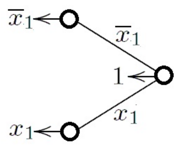


Рис. 4: Универсальный многополюсник порядка 1

Пример. *С помощью метода Шеннона, разлагая ФАЛ* $f(x_1,x_2,x_3)$, *заданную столбцом значений* (1110 1000), *по БП* x_1,x_2, *построить реализующую её (1,1)–КС, а затем получить из этой ККС инверсную схему.*

Имеем:

$$f(0,0,x_3)=(11)=1,$$
$$f(0,1,x_3)=(10)=\bar{x}_3,$$
$$f(1,0,x_3)=(10)=\bar{x}_3,$$
$$f(1,1,x_3)=(00)=0.$$

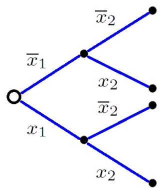
Поэтому разложение имеет вид

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\cdot 1\vee\bar{x}_1x_2\cdot\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3\vee x_1x_2\cdot 0.$$

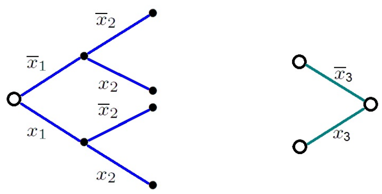
Согласно этому разложению, в универсальном многополюснике нам потребуются только функции $0,1$ и $\bar{x}_3$, из которых функция 0 на самом деле не нужна.

Действуя по алгоритму, получаем:

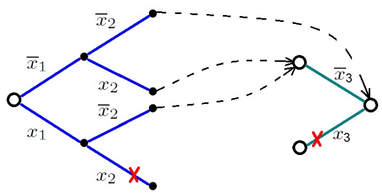
Строим контактное дерево от x_1, x_2 :



Строим универсальный многополюсник порядка 1 от переменной x_3:



Соединяем. Заметим, что x_1x_2 ни к чему не надо присоединять.



Получаем схему (первая часть задачи):

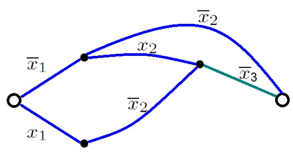


Рис. 5: Построение методом Шеннона КС для примера.

Эта схема является каскадной контактной схемой (ККС). Соответствующая полная ККС имеет вид (цветом показано, как она получена при помощи операций присоединения двух противоположных контактов из схемы, состоящей из пары входвыходных вершин $\{a_0, a_1\}$):

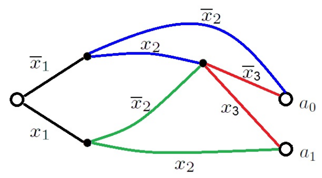


Рис. 6: Полная ККС к примеру.

Удаляя полюс a_0 и контакты, не принадлежащие проводящим цепям из a_1 в выход, получаем инверсную схему (вторая часть задачи).

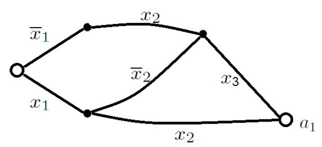


Рис. 7: Инверсная ККС к примеру.

Моделирование совершенной ДНФ на основе контактного дерева и инверсные контактные схемы

Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Этот метод синтеза состоит в следующем:

1. Строится совершенная ДНФ функции f :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0,1\}: \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

2. Строится полное контактное дерево порядка n :

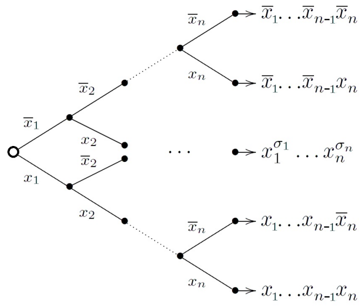


Рис. 8: Полное контактное дерево.

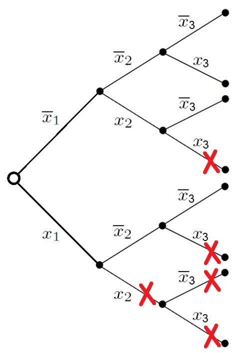
В нем оставляются только те листья, которые соответствуют слагаемым в совершенной ДНФ. Остальные ветви удаляются.

3. Оставшиеся листья склеиваются в один выход.

Пример. *С помощью моделирования совершенной ДНФ на основе контактного дерева построить (1,1)-КС, реализующую ФАЛ* $f(x_1, x_2, x_3)$, *заданную столбцом значений* (1110 1000), *а затем получить из этой ККС инверсную схему.*

Совершенная ДНФ данной функции имеет вид $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Контактное дерево:



После склеивания:

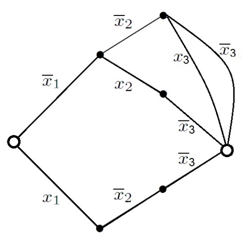


Рис. 9: Построение КС по совершенной ДНФ на основе КД к примеру

Здесь параллельные противоположные контакты можно было стянуть.

Соответствующая полная ККС имеет вид (цветом показано, как она получена при помощи операции присоединения двух противоположных контактов из пары вход-выходных вершин $\{a_0, a_1\}$):

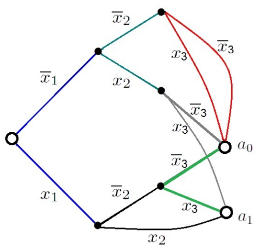


Рис. 10: Полная ККС к примеру.

Удаляя полюс a_0 и контакты, не принадлежащие проводящим цепям из a_1 в выход, получаем инверсную схему (вторая часть задачи).

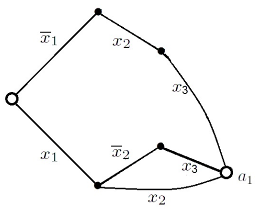


Рис. 11: Инверсная ККС к примеру.