# Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

## Лекция 3

Логика предикатов:
синтаксис (термы, формулы),
семантика (интерпретации,
отношение выполнимости)

Лектор:
**Подымов Владислав Васильевич**

E-mail:
**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2020, весенний семестр

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

*логика высказываний*:

$$\mathrm{Shirk} \to \neg \mathrm{Pass}$$

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) он не сдаст**

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{Shirk}(\mathtt{x}) \rightarrow \neg \mathrm{Pass}(\mathtt{x}))$$

# Вступление

Попробуем формализовать такое высказывание:

**Если кто-то прогуливает лекции,**
**то экзамен (зачёт) не сдаст его сосед**

*логика предикатов*:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{Shirk}(\mathrm{x}) \to \neg \mathrm{Pass}(\textbf{neighbour}(\mathrm{x})))$$

**Логика предикатов** изучает законы причинно-следственной зависимости между утверждениями, основанными на **отношениях** между произвольными предметами

**Формальный язык** логики предикатов ориентирован на описание таких отношений

# Немного о названии “логика предикатов”

**Предикат** (лат. praedicatum — сказанное, сказуемое):

понятие, определяющее предмет суждения (субъект)[1]

| | | |
|---|---|---|
| Кто-то | прогуливает | лекцию |
| (*субъект*) | (*предикат*) | (*объект*) |

В более общем смысле, предикат — это

- свойство, атрибут предмета, явления, события, ...
- отношение между явлениями, предметами, событиями, ...

[1] Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

# Немного о названии “логика предикатов”

классическая
логика
предикатов
первого порядка

# Немного о названии “логика предикатов”

$\parallel$

логика
предикатов
первого порядка

# Немного о названии “логика предикатов”

$|||$

логика

предикатов

## Немного о названии “логика предикатов”

IV

логика

первого порядка

# Немного о названии “логика предикатов”

Будем использовать такое название:

логика
предикатов

# Алфавит

## I. Базовые символы

| | |
|---|---|
| Предметные переменные | $\mathsf{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$ |
| Предметные константы | — это **имена предметов** |
| Функциональные символы | обозначают **операции** над предметами |
| Предикатные символы | обозначают **отношения** между предметами |

# Алфавит

I. **Базовые символы**

Предметные переменные $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Предметные константы $\mathrm{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots\}$

Функциональные символы $\mathrm{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \ldots\}$

Предикатные символы $\mathrm{Pred} = \{\mathrm{P}_1{}^{(m_1)}, \mathrm{P}_2{}^{(m_2)}, \ldots\}$

$n_i$ — **местность** функционального символа $\mathbf{f_i}$, $n_i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
$m_i$ — **местность** предикатного символа $\mathrm{P_i}$, $m_i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Иногда запись местности символа будет опускаться:
например, $\mathbf{f}^{(k)}$ иногда будет записываться как $\mathbf{f}$

Тройка $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$ — сигнатура алфавита

# Алфавит

I. **Базовые символы**

Предметные переменные $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$

Предметные константы $\mathrm{Const} = \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots\}$

Функциональные символы $\mathrm{Func} = \{\mathbf{f_1}^{(n_1)}, \mathbf{f_2}^{(n_2)}, \ldots\}$

Предикатные символы $\mathrm{Pred} = \{\mathrm{P}_1^{(m_1)}, \mathrm{P}_2^{(m_2)}, \ldots\}$

**Примеры**

констант: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\pi$, $\mathbf{c}$, ...

функциональных символов: $+^{(2)}$, $\cdot^{(2)}$, $\mathbf{lim}^{(3)}$, ...

предикатных символов: $<^{(2)}$, $=^{(2)}$, ...

# Алфавит

## II. Логические операции

### (a) Логические связки

| | | |
|---|---|---|
| Конъюнкция | (логическое И) | $\&$ |
| Дизъюнкция | (логическое ИЛИ) | $\vee$ |
| Отрицание | (логическое НЕ) | $\neg$ |
| Импликация | (логическое ЕСЛИ-ТО) | $\rightarrow$ |

### (b) Кванторы

| | | |
|---|---|---|
| Квантор всеобщности | (“для каждого”) | $\forall$ |
| Квантор существования | (“хотя бы один”) | $\exists$ |

## III. Знаки препинания

| | |
|---|---|
| Скобки | ( ) |
| Разделитель | , |

# Синтаксис: термы

*БНФ*, определяющая **синтаксис термов**:

$$t \ ::= \ \mathrm{x} \ \mid \ \mathbf{c} \ \mid \ \mathbf{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

где $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$, $\mathbf{c} \in \mathsf{Const}$ и $\mathbf{f}^{(n)} \in \mathsf{Func}$

**Примеры термов:** $(\mathrm{z} \in \mathsf{Var};\ \mathbf{1} \in \mathsf{Const};\ +^{(2)}, \cdot^{(2)} \in \mathsf{Func})$

1. Предмет, обозначенный переменной $\mathrm{z}$:
$$\mathrm{z}$$
2. Предмет, обозначенный константой $\mathbf{1}$:
$$\mathbf{1}$$
3. Предмет, получающийся применением операции $+$ к *(1)* и *(2)*:
$$+(\mathbf{1}, \mathrm{z})$$
4. Предмет, получающийся применением операции $\cdot$ к *(1)* и *(3)*:
$$\cdot(\mathrm{z}, +(\mathbf{1}, \mathrm{z}))$$
5. Более наглядная инфиксная форма записи терма *(4)*:
$$\mathrm{z} \cdot (\mathbf{1} + \mathrm{z})$$

# Синтаксис: термы

Term — множество всех термов

(*над заданными множествами* Var, Const, Func)

Если $t$ — терм, то:

Var$_t$ — множество всех переменных, входящих в терм $t$

$t(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n)$ — синоним $t$, если $\mathrm{Var}_t \subseteq \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n\}$

Терм $t$ — основной, если $\mathrm{Var}_t = \emptyset$

**Пример:** если $\mathbf{1}, \mathbf{3} \in$ Const и $+^{(2)}, \cdot^{(2)} \in$ Func, то терм

$$\mathbf{3} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{3})$$

является основным

# Синтаксис: формулы

*БНФ*, определяющая **синтаксис формул** логики предикатов:

$$\begin{array}{rcl} \varphi & ::= & \mathrm{P}(t_1, t_2, \dots, t_n) \ \mid \\ & & (\varphi \,\&\, \varphi) \ \mid \ (\varphi \vee \varphi) \ \mid \ (\varphi \to \varphi) \ \mid \ (\neg\varphi) \ \mid \\ & & (\forall \mathrm{x}\ \varphi) \ \mid \ (\exists \mathrm{x}\ \varphi), \end{array}$$

где $\varphi$ — формула, $\mathrm{P}^{(n)} \in \mathsf{Pred}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathsf{Term}$ и $\mathrm{x} \in \mathsf{Var}$

**Примеры формул:** $(\mathrm{P}^{(2)}, \mathrm{R}^{(1)} \in \mathsf{Pred};\ \mathbf{f}^{(2)} \in \mathsf{Func};\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathsf{Var})$

1. Предмет $\mathrm{y}$ и предмет, получающийся из предметов $\mathrm{x}$ и $\mathrm{y}$ применением операции $\mathbf{f}$, входят в отношение $\mathrm{P}$:
$$\mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))$$
2. Для любого предмета $\mathrm{x}$ верно *(1)*:
$$(\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$
3. Если верно *(2)*, то предмет $\mathrm{y}$ обладает свойством $\mathrm{R}$:
$$((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}))$$
4. Хотя бы для одного предмета $\mathrm{y}$ верно *(3)*
$$(\exists \mathrm{y}\ ((\forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))) \to \mathrm{R}(\mathrm{y})))$$

# Синтаксис: формулы

Формула атомарна (является атомом), если имеет вид $\mathrm{P}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $\mathrm{P}^{(n)} \in \mathsf{Pred}$ и $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}$

Неатомарные формулы также называются составными

Form — множество всех формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

**Приоритет логических операций** (в порядке убывания):

$\forall$, $\exists$, $\neg$; затем $\&$; затем $\vee$; затем $\to$

**Как работают приоритеты (пример)**

Следующие формулы считаются синтаксически одинаковыми:

$$\forall \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to \exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))$$

$$(\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y})))$$

$$(((\forall \mathrm{x}\ (\neg \mathrm{P}(\mathrm{x}))) \,\&\, (\exists \mathrm{y}\ \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}))) \to (\exists \mathrm{x}\ ((\neg \mathrm{P}(\mathrm{x})) \vee \mathrm{P}(\mathrm{y}))))$$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\overset{\forall}{\exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_\varphi$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле ${}^{\forall}_{\exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_{\varphi}$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная $\mathrm{y}$ связана квантором $\exists$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_\varphi$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Переменная $\mathrm{x}$ связана квантором $\forall$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\substack{\forall\\\exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_\varphi$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}\underbrace{(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_{\varphi}$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \underbrace{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))}_{\text{Область действия квантора } \forall} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_\varphi$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \rightarrow \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанные вхождения переменной y

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\overset{\forall}{\exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_{\varphi}$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x}\boxed{\neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}))} \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Связанное вхождение переменной x

# Синтаксис: формулы

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним

Область действия внешнего квантора
в формуле $\substack{\forall \\ \exists}\mathrm{x}\ \varphi$ — это подформула $\varphi$

Вхождение переменной в область действия
связывающего её квантора — связанное вхождение

Вхождение переменной, не являющееся связанным, —
свободное вхождение

Переменная, имеющая свободное вхождение, —
свободная переменная формулы

$\mathsf{Var}_{\varphi}$ — множество всех свободных переменных формулы $\varphi$

**Пример:**

$$\exists \mathrm{y}(\forall \mathrm{x} \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}, \mathbf{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}))$$

Свободное вхождение переменной x

# Синтаксис: формулы

$\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращённая запись последовательности “$\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}$”

Если $\varphi$ — формула, то:

- $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ — синоним $\varphi$, если $\mathsf{Var}_\varphi \subseteq \{\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- если $\mathsf{Var}_\varphi = \emptyset$, то $\varphi$ — замкнутая формула, или предложение

CForm[1] — множество всех замкнутых формул
(*в алфавите с заданной сигнатурой*)

[1] Closed Formulae

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\mathrm{lim}(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

в алфавите с такой сигнатурой:

- $\mathbf{0} \in$ Const
- $\mathbf{ad}^{(2)} \in$ Func: $\mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) =$ “$|x - y|$”
- $\mathrm{R}^{(1)}, \mathrm{N}^{(1)}, \mathrm{S}^{(1)}, \mathrm{E}^{(3)}, <^{(2)}, \leq^{(2)} \in$ Pred:
  - $\mathrm{R}(\mathtt{x}) =$ “$\mathtt{x}$ — действительное число”
  - $\mathrm{N}(\mathtt{x}) =$ “$\mathtt{x}$ — натуральное число”
  - $\mathrm{S}(\mathtt{x}) =$ “$\mathtt{x}$ — последовательность действительных чисел”
  - $\mathrm{E}(\mathtt{x}, \mathtt{n}, \mathtt{s}) =$ “$\mathtt{x}$ — $\mathtt{n}$-й член последоватлеьности $\mathtt{s}$”
  - $\mathtt{x} < \mathtt{y}$, $\mathtt{x} \leq \mathtt{y}$ — отношения неравенства чисел $\mathtt{x}$ и $\mathtt{y}$

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\lim(\mathrm{x}, \mathrm{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

Вспоминаем определение:

$\mathtt{s}$ — последовательность действительных чисел,
$\mathtt{x}$ — действительное число, и
для любого положительного действительного числа $\varepsilon$
существует натуральное число $n$, такое что
все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го,
отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на $\varepsilon$

$$\mathrm{S}(\mathtt{s}) \mathbin{\&} \mathrm{R}(\mathtt{x}) \mathbin{\&} \varphi_1$$

С формулой $\varphi_1$ разберёмся отдельно

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\mathrm{lim}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

**Для любого положительного действительного числа** $\varepsilon$
**существует натуральное число** $\mathtt{n}$**, такое что**
**все элементы последовательности** $\mathtt{s}$**, начиная с** $\mathtt{n}$**-го,**
**отстоят от** $\mathtt{x}$ **не более чем на** $\varepsilon$

“Для любого” = “$\forall$”, и справа от $\forall$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Для любого **предмета** $\varepsilon$ верно следующее:
если $\varepsilon$ — положительное действительное число, то существует ...

$$\forall\varepsilon\ (\mathrm{R}(\varepsilon)\,\&(\mathbf{0}<\varepsilon)\to\varphi_2)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой $\varphi_2$

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\mathrm{lim}(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

**Существует натуральное число $\mathtt{n}$, такое что**
**все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го,**
**отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на $\varepsilon$**

“Существует” = “хотя бы один” = “$\exists$”, и справа от $\exists$ обязательно стоит переменная, обозначающая **произвольный предмет**

Переформулируем предложение соответствующим образом:

Существует **предмет** $\mathtt{n}$, для которого верно следующее:
$\mathtt{n}$ — натуральное число, и кроме того, все элементы ...

$$\exists \mathtt{n}\ (\mathrm{N}(\mathtt{n}) \& \varphi_3)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой $\varphi_3$

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\lim(\mathrm{x}, \mathrm{s}) =$
“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

**Все элементы последовательности $\mathtt{s}$, начиная с $\mathtt{n}$-го, отстоят от $\mathtt{x}$ не более чем на $\varepsilon$**

“Все” = “для любого” = “$\forall$”

Присвоим произвольному элементу, о котором говорится в предложении, имя ($\mathtt{y}$), и переформулируем предложение:

Для любого предмета $\mathtt{y}$ верно следующее:
если $\mathtt{y}$ совпадает с каким-либо элементом последовательности $\mathtt{s}$ с номером, не меньшим $\mathtt{n}$, то $\mathtt{y}$ отстоит от $\mathtt{x}$ не более чем на $\varepsilon$

$$\forall \mathrm{y}\ (\varphi_4 \to \mathbf{ad}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \varepsilon)$$

Теперь отдельно разберёмся с формулой $\varphi_4$

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$

“$\mathtt{x}$ — предел последовательности действительных чисел $\mathtt{s}$”

**$\mathtt{y}$ совпадает с каким-либо элементом последовательности $\mathtt{s}$ с номером, не меньшим $\mathtt{n}$**

В формуле $\varphi_4$ “снаружи” располагается одна из операций

$$\&,\ \vee,\ \to,\ \neg,\ \forall,\ \exists$$

Чтобы понять, какая именно, переформулируем предложение так, чтобы “снаружи” располагалось одно из словосочетаний

“и”, “или”, “если-то”, “не”, “для любого”, “существует”:

Существует предмет $m$, такой что $m$ — натуральное число, и $m$ не меньше $n$, и $y$ — $m$-й элемент последовательности $s$

$$\exists \mathtt{m}\ (\mathrm{N}(\mathtt{m}) \& (\mathtt{n} \leq \mathtt{m}) \& \mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}))$$

# Синтаксис: формулы

**Содержательный пример:** требуется записать формулу

$\lim(\mathtt{x}, \mathtt{s}) =$

“x — предел последовательности действительных чисел s”

Ответ:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{S}(\mathtt{s})\ \&\ \mathrm{R}(\mathtt{x})\ \& \\
\forall\varepsilon\ ( \\
\quad \mathrm{R}(\varepsilon)\ \&(\mathbf{0}<\varepsilon) \to \\
\quad \exists\mathtt{n}\ ( \\
\quad\quad \mathrm{N}(\mathtt{n})\ \& \\
\quad\quad \forall\mathtt{y}\ ( \\
\quad\quad\quad \exists\mathtt{m}\ ( \\
\quad\quad\quad\quad \mathrm{N}(\mathtt{m})\ \&(\mathtt{n} \leq \mathtt{m})\ \&\ \mathrm{E}(\mathtt{y}, \mathtt{m}, \mathtt{s}) \\
\quad\quad\quad ) \to \\
\quad\quad\quad \mathbf{ad}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \leq \varepsilon \\
\quad\quad ) \\
\quad ) \\
)
\end{array}
$$

# Семантика: интерпретации

Как и в *логике высказываний*, смысл формуле логики предикатов придаёт интерпретация — “мир, в котором живёт формула”

Интерпретация состоит из

- предметов, населяющих мир
- операций[1] над предметами
- отношений[2], связывающих предметы

Таким образом, в основе интерпретаций логики предикатов лежат алгебраические системы[3]

[1] это смысл **функциональных символов**
[2] это смысл **предикатных символов**
[3] не следует пугаться этого термина;
это и есть совокупность “предметы + операции + отношения”

# Семантика: интерпретации

Интерпретация (*сигнатуры* $\langle \mathrm{Const}, \mathrm{Func}, \mathrm{Pred} \rangle$) — это система $\left\langle \mathrm{D}, \overline{\mathrm{Const}}, \overline{\mathrm{Func}}, \overline{\mathrm{Pred}} \right\rangle$, где:

- $\mathrm{D}$ — непустое множество предметов (область интерпретации; предметная область; универсум)
- $\overline{\mathrm{Const}} : \mathrm{Const} \to \mathrm{D}$ — оценка констант
- $\overline{\mathrm{Func}} : \mathrm{Func} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \mathrm{D})$ — оценка функциональных символов
- $\overline{\mathrm{Pred}} : \mathrm{Pred} \to \cup_{n \geq 1}(\mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\})$ — оценка предикатных символов

$\bar{\mathbf{c}} = \overline{\mathrm{Const}}(\mathbf{c})$ — предмет, сопоставленный константе $\mathbf{c}$
$\bar{\mathbf{f}} = \overline{\mathrm{Func}}(\mathbf{f}) : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D}$ — функция, сопоставленная символу $\mathbf{f}^{(n)}$
$\overline{\mathrm{P}} = \overline{\mathrm{Pred}}(\mathrm{P}) : \mathrm{D}^n \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ — предикат, сопоставленный символу $\mathrm{P}^{(n)}$

# Семантика: интерпретации

## Пример

Сигнатура: Const $= \{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

Интерпретация:

предметная область: $\mathsf{D} = \{0, 1, 2\}$

оценка констант: $\overline{\mathbf{c_1}} = 0$, $\overline{\mathbf{c_2}} = 1$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

| $\mathrm{x}$ | $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

| $\mathrm{x}$ \ $\mathrm{y}$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

# Семантика термов

Значение $t(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ терма $t(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации — это **предмет**, задаваемый так:

- термы-переменные:

$$\mathtt{x}_{\mathtt{i}}[\widetilde{d^n}] = d_i$$

- термы-константы:

$$\mathbf{c}[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{c}}$$

- остальные термы:

$$\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}] = \overline{\mathbf{f}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}])$$

# Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- атомарная формула:

$$\mathcal{I} \models \mathrm{P}(t_1, \ldots, t_k)[\widetilde{d^n}]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\overline{\mathrm{P}}(t_1[\widetilde{d^n}], \ldots, t_k[\widetilde{d^n}]) = \mathbf{t}$$

- отрицание:

$$\mathcal{I} \models (\neg\varphi)[\widetilde{d^n}]$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}]$$

# Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}^n})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- конъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \,\&\, \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}] \text{ и } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$$
- дизъюнкция:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \models \varphi[\widetilde{d^n}] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$$
- импликация:
  $$\mathcal{I} \models (\varphi \to \psi)[\widetilde{d^n}]$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$\mathcal{I} \not\models \varphi[\widetilde{d^n}] \text{ или } \mathcal{I} \models \psi[\widetilde{d^n}]$$

# Семантика: отношение выполнимости ($\models$)

Отношение выполнимости формулы $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})$ в интерпретации $\mathcal{I}$ на наборе предметов $d_1, \ldots, d_n$ из области интерпретации ($\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}^n})[\widetilde{d^n}]$) определяется так:

- квантор всеобщности:

  $\mathcal{I} \models (\forall \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$

  $\Leftrightarrow$

  **для любого** предмета $d_0$ из области интерпретации верно $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$

- квантор существования:

  $\mathcal{I} \models (\exists \mathrm{x}_0\ \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^n}))[\widetilde{d^n}]$

  $\Leftrightarrow$

  **хотя бы для одного** предмета $d_0$ из области интерпретации верно $\mathcal{I} \models \varphi(\mathrm{x}_0, \widetilde{\mathrm{x}^n})[d_0, \widetilde{d^n}]$

$A[\mathrm{x}_1/d_1, \ldots, \mathrm{x}_n/d_n]$ — синоним записи $A(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)[d_1, \ldots, d_n]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим интерпретации такого вида:

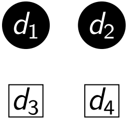
предметная область — квадраты и круги белого и чёрного цвета, расположенные на плоскости

сигнатура состоит из пяти предикатных символов, отвечающих следующим свойствам:

$\mathrm{C}(\mathrm{x})$: “$\mathrm{x}$ — круг”
$\mathrm{S}(\mathrm{x})$: “$\mathrm{x}$ — квадрат”
$\mathrm{B}(\mathrm{x})$: “$\mathrm{x}$ — чёрный предмет”
$\mathrm{W}(\mathrm{x})$: “$\mathrm{x}$ — белый предмет”
$\mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$: “предмет $\mathrm{x}$ лежит под предметом $\mathrm{y}$”

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x})\,\&\,\mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{C}(\mathtt{y})\,\&\,\mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Содержательно эта формула прочитывается так:

Для каждого предмета $\mathtt{x}$: если он является белым и является квадратом, то существует предмет $\mathtt{y}$, такой что он является чёрным, и он является кругом, и предмет $\mathtt{x}$ лежит под предметом $\mathtt{y}$

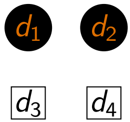
Проще говоря,

Каждый белый квадрат лежит под каким-то чёрным кругом

Чтобы строго убедиться, что это утверждение верно в $\mathcal{I}$, следует проверить соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:




и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathrm{x}$

1. $\mathrm{x} \leftarrow d_1$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_1]$
2. $\mathrm{x} \leftarrow d_2$:
   - $\mathcal{I} \not\models \mathrm{W}(\mathrm{x})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \not\models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}))[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathrm{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{B}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathrm{x}, \mathrm{y})))[d_2]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$$\begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ \boxed{d_3} & \boxed{d_4} \end{array}$$

и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathtt{x}$

3. $\mathtt{x} \leftarrow d_3$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathtt{y})[d_1]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))[\mathtt{y}/d_1, \mathtt{x}/d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_3]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_3]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$d_1$ $d_2$

$\boxed{d_3}$ $\boxed{d_4}$

и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))$$

Переберём все предметы, подставляя их на место $\mathtt{x}$

4. $\mathtt{x} \leftarrow d_4$:
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{B}(\mathtt{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{C}(\mathtt{y})[d_2]$
   - $\mathcal{I} \models \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})[\mathtt{y}/d_2, \mathtt{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))[\mathtt{y}/d_2, \mathtt{x}/d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_4]$
   - $\mathcal{I} \models (\mathrm{W}(\mathtt{x}) \,\&\, \mathrm{S}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{y}\ (\mathrm{B}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{C}(\mathtt{y}) \,\&\, \mathrm{U}(\mathtt{x}, \mathtt{y})))[d_4]$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

$d_1$ $d_2$

$\boxed{d_3}$ $\boxed{d_4}$

и такую формулу $\varphi$:

$$\forall x\ (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))$$

Итого:

$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_1]$$
$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_2]$$
$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_3]$$
$$\mathcal{I} \models (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))[d_4]$$

А значит,

$$\mathcal{I} \models \forall x\ (W(x) \,\&\, S(x) \to \exists y\ (B(y) \,\&\, C(y) \,\&\, U(x, y)))$$

# Семантика: примеры

Рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$:

сигнатура: Const $= \emptyset$, Func $= \{\mathbf{f}^{(1)}\}$, Pred $= \{\mathrm{P}^{(1)}, \mathrm{R}^{(2)}\}$

предметная область: D $= \{0, 1, 2\}$

оценка функциональных и предикатных символов:

$\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$

| x | $\bar{\mathbf{f}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$

| x | $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{x})$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{\mathrm{R}}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

и такую формулу $\varphi$:

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow \exists \mathrm{y}\ (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\ \&\ \neg \mathrm{P}(\mathbf{f}(\mathrm{y}))))$$

Проверим соотношение $\mathcal{I} \models \varphi$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x, y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x, y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| x | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| x | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x, y)$

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x, y)[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\bar{P}(x)$

| $x$ | $\bar{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\bar{R}(x, y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models R(x,y)[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[1]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| x | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| x | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x, y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \models P(\mathbf{f}(y))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\neg P(\mathbf{f}(y)))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y) \,\&\, \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| x | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\bar{P}(x)$

| x | $\bar{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\bar{R}(x,y)$

| x \ y | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/0, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/1, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y)))[y/2, x/2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\ (P(x) \to \exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x, y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\ (R(x,y)\ \&\ \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\, (P(x) \to \exists y\, (R(x,y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\bar{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\bar{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\bar{P}(x)$

| $x$ | $\bar{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\bar{R}(x,y)$

| $x \backslash y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\, (R(x,y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\, (R(x,y)\, \&\, \neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

# Семантика: примеры

$$\forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$

$\overline{\mathbf{f}}(x)$

| $x$ | $\overline{\mathbf{f}}(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

$\overline{P}(x)$

| $x$ | $\overline{P}(x)$ |
|---|---|
| 0 | **t** |
| 1 | **f** |
| 2 | **t** |

$\overline{R}(x,y)$

| $x$ \ $y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | **t** | **t** | **f** |
| 1 | **t** | **f** | **t** |
| 2 | **f** | **t** | **t** |

$\mathcal{I} \models P(x)[2]$

$\mathcal{I} \not\models (\exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

$\mathcal{I} \not\models (P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))[2]$

Значит,

$$\mathcal{I} \not\models \forall x\,(P(x) \to \exists y\,(R(x,y)\,\&\,\neg P(\mathbf{f}(y))))$$