# Функции алгебры логики. Критерий полноты системы функций алгебры логики.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

# Функция алгебры логики

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 0$, называется **функцией алгебры логики**, если

$$f : E_2^n \to E_2.$$

Множество всех функций алгебры логики обозначается $P_2$.

# Полная система

Пусть $A \subseteq P_2$. Множество $A$ называется **полной системой**, если формулами над множеством $A$ можно выразить **любую** функцию алгебры логики.

**Предложение**. *Система* $A = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$ *является полной*.

# Замыкание множества

Пусть $A \subseteq P_2$. **Замыканием** $[A]$ множества $A$ называется множество всех функций, которые могут быть выражены формулами над $A$.

Множество $A$ называется **замкнутым классом**, если $[A] = A$.

# Функции, сохраняющие константу, и линейные функции

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ **сохраняет** 0, если

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Множество всех функций, сохраняющих 0, обозначим $T_0$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ **сохраняет** 1, если

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

Множество всех функций, сохраняющих 1, обозначим $T_1$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ называется **линейной**, если найдутся такие $c_0, c_1, \ldots, c_n \in E_2$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n.$$

Множество всех линейных функций обозначим $L$.

# Самодвойственные и монотонные функции

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется **самодвойственной**, если

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Множество всех самодвойственных функций обозначим $S$.

Если $\alpha, \beta \in E_2^n$, то $\alpha \leqslant \beta$ при $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_2$ называется **монотонной**, если для любых наборов $\alpha, \beta \in E_2^n$ из $\alpha \leqslant \beta$ следует $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Множество всех монотонных функций обозначим $M$.

# Замкнутость $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$

**Теорема**. *Каждое из множеств* $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$ *является замкнутым классом, не совпадающим с* $P_2$.

## Три вспомогательные леммы

**Лемма 1 (о несамодвойственной функции).** *Если $f \notin S$, то, подставляя вместо ее переменных функции $x$, $\bar{x}$, можно получить функцию, равную константе.*

**Лемма 2 (о немонотонной функции).** *Если $f \notin M$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0$, $1$, $x$ можно получить функцию $\bar{x}$.*

**Лемма 3 (о нелинейной функции).** *Если $f \notin L$, то, подставляя вместо ее переменных функции $0$, $1$, $x$, $\bar{x}$, $y$, $\bar{y}$ можно получить функцию $x \cdot y$ или функцию $\overline{x \cdot y}$.*

# Теорема Поста

**Теорема (Поста).** *Пусть* $A \subseteq P_2$. *Множество* $A$ *является полной системой тогда и только тогда, когда* $A$ *не содержится ни в одном из классов* $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$, *т. е.*

$$A \not\subseteq T_0, \; A \not\subseteq T_1, \; A \not\subseteq L, \; A \not\subseteq S, \; A \not\subseteq M.$$

# Теорема Поста

**Доказательство**. 1. *Необходимость* обоснуем от обратного: пусть $A$ является полной системой, но содержится в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$, например, пусть $A \subseteq T_0$.

Тогда получаем:

$$[A] \subseteq [T_0] = T_0 \neq P_2.$$

Приходим к противоречию.

Значит, $A$ не может содержаться ни в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2. *Достаточность*. Пусть $A$ не содержится в одном из классов $T_0$, $T_1$, $L$, $S$, $M$. Докажем, что в этом случае $A$ — полная система.

Из условия непринадлежности $A$ к каждому из перечисленных классов следует, что в $A$ найдутся такие функции

$$f_0, f_1, f_l, f_s, f_m,$$

что

$$f_0 \notin T_0, \ f_1 \notin T_1, \ f_l \notin L, \ f_s \notin S, \ f_m \notin M.$$

Отметим, что функции $f_0, f_1, f_l, f_s, f_m$ не обязательно все различны.

**Доказательство**. Покажем, что формулами над $A$ можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

**Доказательство**. 2.1. Построение констант 0 и 1.

Рассмотрим функции $f_0 \notin T_0$ и $f_1 \notin T_1$. Положим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f_0(x, \ldots, x), \\ \varphi_1(x) &= f_1(x, \ldots, x). \end{aligned}$$

Тогда:

| $x$ | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $b$ |
| 1 | $a$ | 0 |

Теперь если $a = 1$ и $b = 0$, то $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = 0$.

Если же $a = 0$ или $b = 1$, то получена функция $\bar{x}$. Тогда по лемме о несамодвойственной функции из $f_s \notin S$, подставляяя вместо ее переменных функции $x$, $\bar{x}$, получаем некоторую константу $c \in E_2$, а затем $\bar{c} \in E_2$.

Константы 0 и 1 построены.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2.2. Построение отрицания $\bar{x}$.

По лемме о немонотонной функции из $f_m \notin M$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, $x$, получаем отрицание $\bar{x}$.

Отрицание $\bar{x}$ построено.

# Теорема Поста

**Доказательство**. 2.3. Построение конъюнкции $x \cdot y$.

По лемме о нелинейной функции из $f_l \notin L$, подставляя вместо ее переменных функции 0, 1, $x$, $\bar{x}$, $y$, $\bar{y}$ и, возможно, навешивая отрицание над функцией, получаем конъюнкцию $x \cdot y$.

Конъюнкция $x \cdot y$ построена.

# Теорема Поста

**Доказательство**. Значит, формулами над $A$ можно выразить все функции из полной системы $\{0, 1, \bar{x}, x \cdot y\}$.

Следовательно, система $A$ — полна.

$\square$

# Литература

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 9–10, 18–22.