Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений».

Для бакалавров 4 курса профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (411–419 группы) курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» читается в 7 семестре в объёме 3 часов лекций и 2 часов семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2–6, 9 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программе и планах его изучения в 2021–2022 уч. году, методических материалах, а в разделах 7 и 8 — об особенностях организации учебного процесса, формах и сроках проведения контрольных мероприятий.

В соответствии с этими планами в течение семестра проводятся 3 основные (по 2 часа) контрольные работы и, возможно, несколько промежуточных (до 1 часа). По результатам контрольных с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на экзамене (см. раздел 8).

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики, лекторы 2021–2022 учебного года — профессор Селезнева Светлана Николаевна (selezn@cs.msu.ru), профессор Ложкин Сергей Андреевич (lozhkin@cs.msu.ru), Савицкий Игорь Владимирович (savvvig@gmail.com).

2. Аннотация

Курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (ранее «Дополнительные главы дискретной математики») является продолжением курсов «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» и посвящён рассмотрению классических вычислительных моделей в теории алгоритмов, связанных с распознаванием множеств и вычислением функций, элементам теории сложности алгоритмов и теории дискретных управляющих систем.

В курсе изучаются модели конечных автоматов (распознавателей и преобразователей) и машин Тьюринга, рассматривается техника преобразований этих устройств и вычислений на этих устройствах. Для каждого из устройств приводится эквивалентный алгебраический формализм: правоинвариантные отношения эквивалентности, регулярные выражения, функциональная система с операциями суперпозиции и введения обратной связи над автоматными функциями, формализм Клини для класса частично-рекурсивных функций. Для каждого из случаев доказывается эквивалентность алгебраического и автоматного (машинного) подходов к определению класса множеств или функций. Рассматриваются сложностные классы P и NP, вводится понятие NP-полноты, доказывается полиномиальная разрешимость и устанавливается NP-полнота ряда задач.

Излагаются методы синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов и для не всюду определённых ФАЛ, устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этих классов. Изучается сложность некоторых «индивидуальных» ФАЛ. Исследуется связь между схемной и алгоритмической сложностью ФАЛ.

3. Программа

I. Конечные автоматы

Конечные автоматы-распознаватели и конечно-автоматные множества слов, задание автоматов диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Правоинвариантное отношение эквивалентности, его связь с конечно-автоматными множествами. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. Операции произведения и итерации, замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. Регулярные выражения и регулярные множества, совпадение классов регулярных и конечно-автоматных множества.

Детерминированные функции, их определение с помощью бесконечных деревьев, вес дерева. Конечные автоматы-преобразователи, их задание диаграммами Мура и каноническими уравнениями. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. Зависимость с запаздыванием, операция введения обратной связи, замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции введения обратной связи. Схемы из автоматных элементов, реализация конечно-автоматных функций схемами из автоматных элементов. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций.

II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

Машины Тьюринга, функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. Моделирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга.

Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации над частичными функциями. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительно операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные функции, примитивная рекурсивность простейших арифметических функций. Частично-рекурсивные функции, примеры не всюду определенных чистично-рекурсивных функций. Совпадение класса частично-рекурсивных функций с классом функций, вычислимых на машинах Тьюринга, теорема Клини.

Сложностные классы P и NP. Полиномиальная сводимость, NP-полнота. NP-полнота задачи выполнимости КНФ и задачи выполнимости 3-КНФ. Полиномиальная разрешимость задачи выполнимости 2-КНФ.

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

Задача синтеза схем для функций алгебры логики (ФАЛ) из специальных классов. Мощностная классификация специальных классов ФАЛ и нижние мощностные оценки связанных с ними функций Шеннона. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их метрические свойства и структурное описание.

Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для (ненулевых) квазиинвариантных классов. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов на основе их «погружения» в квазиинвариантные классы и на основе принципа локального кодирования О. Б. Лупанова.

Задача синтеза схем для неоднозначно заданных ФАЛ и, в частности, для не всюду определённых ФАЛ. Асимптотически оптимальные методы синтеза схем для не всюду определённых ФАЛ.

Задача синтеза схем для «индивидуальных» ФАЛ и проблема получения нижних оценок их сложности. Теорема Храпченко о сложности реализации ФАЛ в классе π-схем. Схемная и алгоритмическая сложность функций, гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа.

4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» (осенний семестр 2021–2022 уч. года; 411–419 группы)

I. Конечные автоматы

1. Конечный автомат-распознаватель, конечно-автоматное множество. [1, с. 27–28]
2. Правоинвариантное отношение эквивалентности, связь с конечно-автоматными множествами. [1, с. 29–31]
3. Замкнутость класса конечно-автоматных множеств относительно теоретико-множественных операций. [1, с. 32–33]
4. Недетерминированные автоматы, процедура детерминизации. [1, с. 34–36]
5. Операции произведение и итерации. Замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций произведения и итерации. [1, с. 37–39]
6. Регулярные выражения и регулярные множества. [1, с. 40]
7. Теорема Клини. [1, с. 40–42]
8. Детерминированные функции. Задание детерминированных функций деревьями. Вес дерева. [2, с. 74–85]
9. Канонические уравнения, векторная и скалярная формы канонических уравнений. [2, с. 88–91]
10. Замкнутость класса конечно-автоматных функций относительно операции суперпозиции. [2, с. 92–94], [1, с. 57–59]
11. Зависимость с запаздыванием. Операция введения обратной связи. [2, с. 94–96, 98–102]
12. Существование конечных полных систем в классе конечно-автоматных функций. [2, с. 105–108], [1, с. 60–61]

II. Машины Тьюринга и вычислимые функции

13. Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. [1, с. 65–68]
14. Операции композиции и итерации над машинами Тьюринга. [1, с. 70–72]
15. Моделирование машин Тьюринга. [1, с. 74–77]
16. Универсальная машина Тьюринга. [1, с. 84–86]
17. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 77–79]
18. Замкнутость класса функций, вычислимых на машинах Тьюринга, относительо операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. [1, с. 80–83]
19. Класс примитивно-рекурсивных функций. Простейшие примитивно-рекурсивные функции. [1, с. 102–105]
20. Класс частично-рекурсивных функций. Примеры частично-рекурсивных функций. [1, с. 79, 108–109]

21. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини. [1, с. 114–117]

22. Классы P и NP. Примеры задач из класса NP. [1, с. 89–93]

23. NP-полнота. Теорема Кука. [1, с. 95–99]

24. NP-полнота задачи 3-ВЫП. [1, с. 99–100]

25. Полиномиальная разрешимость задачи 2-ВЫП. [1, с. 101–102]

III. Сложность структурной реализации функций алгебры логики из некоторых классов

26. Задача синтеза схем для функций (операторов) из специального класса, мощностные нижние оценки функции Шеннона для их сложности в случае невырожденного (ненулевого, квазиинвариантного) класса. [4, §1]

27. Инвариантные классы функций С. В. Яблонского, их описание на языке базовых множеств и порождающих элементов. Теорема о числе инвариантных классов и фрагменты её доказательства. [4, §11]

28. Синтез схем на основе модификации асимптотически наилучшего метода. Стандартные классы и стандартность класса функций, равных нулю на всех наборах значений переменных, номера которых больше заданного числа. [4, §2]

29. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для ненулевых квазиинвариантных классов, их стандартность. [4, §3]

30. Общее описание принципа локального кодирования, его применение для доказательства стандартности класса самодвойственных функций. [4, §4]

31. Применение принципа локального кодирования для доказательства стандартности невырожденных классов симметрических операторов, операторов, связанных с вычислением функции на нескольких последовательных наборах. [4, §5]

32. Задача синтеза схем для не всюду определённых функций. Особенности получения нижней мощностной оценки соответствующей функции Шеннона, формулировка теоремы о её асимптотическом поведении. [4, §6]

33. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «сильной» определённости. [4, §7]

34. Лемма о линейном разделяющем операторе. Асимптотически наилучший метод синтеза схем для не всюду определённых функций в случае их «средней» и «слабой» определённости. [4, §8]

35. Лемма о цепях и сечениях π-схем. Верхние оценки сложности реализации линейных функций в классе π-схем. [4, §9]

36. Теорема Храпченко, нижние оценки сложности линейной функции в классе π-схем. [4, §10]

37. Схемная и алгоритмическая сложность функций, построение сложно реализуемых функций. Гипотеза С. В. Яблонского и теорема Дж. Сэвиджа. [6, с. 42–45]

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи по конечным автоматам

1. Построить диаграмму Мура конечного автомата, распознающего заданное множество.
2. Используя правоинвариантное отношения эквивалентности, доказать, что заданное множество не является конечно-автоматным.
3. Построить регулярное выражение, определяющее заданное множество.
4. Построить диаграмму Мура конечного автомата, реализующего заданную функцию.
5. По диаграмме Мура построить канонические уранения и схему в стандартном автоматном базисе.
6. По схеме в стандартном автоматном базисе построить канонические уранения и диаграмму Мура.
7. Доказать полноту (относительно операций суперпозиции и обратной связи) заданного множества автоматных функций .

II. Задачи по машинам Тьюринга, рекурсивным функциям и сложностным классам

8. Построить машину Тьюринга, вычисляющую заданную функцию или выполняющую заданное преобразование.
9. Доказать примитивную рекурсивность заданной функции.
10. Применить операцию минимизации к заданной (частичной) функции.
11. Доказать частичную рекурсивность заданной функции.
12. Доказать принадлежность к классу P заданного множества или задачи.
13. Доказать принадлежность к классу NP заданного множества или задачи.
14. Провести сведение заданной КНФ к 3-КНФ, сохраняющее выполнимость.
15. Применить полиномиальный алгоритм проверки выполнимости к заданной 2-КНФ.

III. Задачи на сложность реализации функций алгебры логики (ФАЛ)

16. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ инвариантным классом, и, в случае инвариантности этого класса, найти его порождающее множество.
17. Выяснить, является ли заданный класс ФАЛ (операторов) вырожденным, и, в случае его невырожденности, получить нижнюю мощностную оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из этого класса схемами из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.
18. Получить верхнюю (асимптотически точную) оценку функции Шеннона для сложности реализации ФАЛ из заданного специального класса из определённых или не всюду определённых ФАЛ при их реализации СФЭ в стандартном базисе.
19. Получить требуемую нижнюю оценку сложности реализации заданной ФАЛ в классе π-схем.

6. Литература

1. Марченков С. С. Избранные главы дискретной математики. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 133 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/2/25/ИзбрГлавыДискрМатем_2015.pdf

2. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2004. — 256 с.

4. Ложкин С. А. Дополнительные главы кибернетики. — МГУ, 2019.
   https://mk.cs.msu.ru/images/0/0b/Dgcyb-lect-190113.pdf

5. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007. — 188 с.

6. Сапоженко А. А. Некоторые вопросы сложности алгоритмов. — М.: Изд-во МГУ, 2001. — 46 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/e/e8/Sapozhenko_alg.pdf (номера страниц не соответствуют печатному изданию)

7. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2005. — 416 с.

8. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики»: 2-е изд. — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2011. — 71 с.
   https://mk.cs.msu.ru/images/a/ab/Задачи_по_курсу_Основы_кибернетики_2011.pdf

7. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов

Данный вариант курса «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики» является достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы[1] студенты прорабатывали материал, пройденный на предшествующей лекции (семинаре), и желательно, чтобы они *знакомились с материалом предстоящей лекции* (*семинара*).

Для контроля за освоением программы курса в течение семестра проводятся 3 основные (по 2 часа) контрольные работы. Контрольные работы призваны проверить знание и понимание определений, формулировок утверждений и т. п., а также умение решать задачи. Планируется осуществлять систематический (выборочный) контроль за работой студентов как на семинарах, так и на лекциях. Контрольные работы проводятся в рамках семинарских занятий, по одной основной контрольной на каждый из трёх разделов курса.

Информационные объявления, данные о посещаемости и текущей успеваемости студентов вывешиваются на сайте по адресу:
Дополнительные_главы_дискретной_математики_и_кибернетики_(2-й_поток,_4-й_курс)

8. О проведении экзамена по курсу «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики»

По результатам контрольных работ с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы каждому из них выставляется предварительная оценка.

Студенты с предварительной оценкой «3» или «4», не претендующие на её повышение, а также студенты с предварительной оценкой «5» сдают экзамен по упрощённой форме (без билета и без подготовки) в виде собеседования по программе курса (преимущественно на знание и понимание определений и формулировок утверждений) с целью подтверждения своей оценки.

Остальные студенты (с оценкой «2» или с оценками «3» и «4», претендующие на их повышение) получают билет, включающий в себя 2 теоретических вопроса и 1 задачу из трёх различных разделов курса, и после 15–20 минутной подготовки отвечают на него на уровне формулировок, утверждений и идей их доказательства. После ответа на билет проводится общее собеседование по другим вопросам программы.

Итоговая экзаменационная оценка, как правило, не может отличаться от предварительной оценки больше, чем на 1 балл.

[1] 1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий

9. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2021–2022 уч. года

Семинар 1

Множества, допускаемые конечными автоматами. Правоинвариантная эквивалентность. Теоретический материал [1, с. 27–31].

В классе и на дом.

1. Построить диаграмму Мура для автомата в алфавите $\{1, 0\}$, который допускает следующее множество:
   (a) (1) Множество $\{0, 1, \Lambda\}$; (2) Множество $\{0, 1\}^* \setminus \{0, 1, \Lambda\}$;
   (b) Все слова, начинающиеся на 01;
   (c) Все слова длины 3, кроме 110;
   (d) Все слова, содержащие 001;
   (e) Все слова, имеющие вхождения слов 000 и 111.
2. Доказать конечную автоматность множеств:
   (a) Конечное множество X в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$; множество $\{a_1, \ldots, a_m\}^* \setminus X$;
   (b) Множество слов в алфавите $\{0, 1\}$, содержащие неперекрывающиеся слова 000, 001, 011;
   (c) Множества вида $0^{n_1}10^{n_2}1\ldots10^{n_k}$, $n_i \geqslant 1$: (a) При каждом фиксированном k; (b) При произвольном k.
3. Построить правоинвариантное отношение эквивалентности конечного индекса, объединением классов эквивалентности которого являются множества:
   (a) $\{\Lambda\}$;
   (b) $\{\Lambda, 0, 1\}$;
   (c) $\{0^n1\colon n \geqslant 0\}$;
   (d) Слова чётной длины и 1, 111.
4. Для любого $n \geqslant 2$ определить на $\{0, 1\}$ правоинвариантное отношение эквивалентности индекса n.
5. Пользуясь правоинвариантным отношением эквивалентности доказать, что множества в алфавите $\{0, 1\}$ НЕ конечно-автоматны:
   (a) $\{0^n1^{2n}, n \geqslant 1\}$;
   (b) Симметричные слова в любом не однобуквенном алфавите;
   (c) $\{0^{n^2}, n \geqslant 1\}$.

Семинар 2

Теоретико-множественные операции над конечно-автоматными множествами. Недетерминированные автоматы. Операции произведения и итерации. Теоретический материал [1, с. 32–39].

В классе и на дом.

1. Ввести операцию прямого произведения автоматов. Доказать замкнутость конечно-автоматных множеств относительно операций объединения и пересечения.

2. Сохраняют ли операции $\cup$, $\cap$, $\cdot$, $*$ класс не конечно-автоматных множеств?

3. Построить диаграмму Мура и описать множество, допускаемое недетерминированным автоматом:

$$\begin{aligned} &Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\ &f(0, q_1) = \{q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1, q_2\},\\ &f(0, q_2) = \{q_3\}, \quad f(1, q_2) = \{q_3\},\\ &f(0, q_3) = \{q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_2, q_3\},\\ &F = \{q_3\}. \end{aligned}$$

4. Построить методом детерминизации эквивалентный данному детерминированный автомат:

$$\begin{aligned} &Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\ &f(0, q_1) = \{q_1, q_2\}, \quad f(1, q_1) = \{q_1\},\\ &f(0, q_2) = \{q_2\}, \qquad\ \ f(1, q_2) = \{q_2, q_3\},\\ &f(0, q_3) = \{q_1, q_3\}, \quad f(1, q_3) = \{q_1, q_3\},\\ &F = \{q_3\}. \end{aligned}$$

5. Пусть $\mathcal{A}_i = \{A, Q, f, q_1, F_i\}, i = 1, 2, 3$ (недетерминированные автоматы). Верно ли, что
   (a) При $F_2 = Q \setminus F_1$ выполнено $D(\mathcal{A}_2) = A^* \setminus D(\mathcal{A}_1)$;
   (b) При $F_3 = F_1 \cap F_2$ выполнено $D(\mathcal{A}_3) = D(\mathcal{A}_1) \cap D(\mathcal{A}_2)$.

6. Построить недетерминированный автомат, который допускает произведение автоматных множеств $D(\mathcal{A}) \cdot D(\mathcal{B})$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\colon Q = \{q_1, q_2, q_3\},\\ &f(0, q_1) = q_2, \quad f(1, q_1) = q_1,\\ &f(0, q_2) = q_2, \quad f(1, q_2) = q_3,\\ &f(0, q_3) = q_1, \quad f(1, q_3) = q_3,\\ &F = \{q_1, q_3\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}\colon Q = \{q_1, q_2\},\\ &f(0, q_1) = q_1, \quad f(1, q_1) = q_2,\\ &f(0, q_2) = q_1, \quad f(1, q_2) = q_2,\\ &F = \{q_2\}. \end{aligned}$$

7. Для автомата $\mathcal{A}$ из предыдущей задачи построить недетерминированный автомат, принимающий $D(\mathcal{A})^*$.

8. Построить из множеств $\{0\}, \{1\}$ при помощи объединения, произведения и итерации множество всех слов, содержащих подслово 0001.

9. $A = \{a_1, \dots a_m\}$. Сколько раз необходимо применить операцию итерации, чтобы получить множество $A^* \setminus \{\bar{a}\}$ при помощи объединения, произведения и итерации из множеств вида $\{a_i\}$?

10. Пусть множество X состоит из n слов. Может ли множество $X \cdot X$ содержать больше n^2 слов? Меньше n^2 слов? В точности n^2 слов?

Семинар 3

Регулярные выражения и регулярные множества. Теорема Клини. Теоретический материал [1, с. 40–42].

В классе и на дом.

1. Доказать регулярность множеств слов в алфавите $\{0, 1\}$:
   (a) Любое конечное множество слов и дополнение к конечному множеству;
   (b) Множество слов, содержащих в качестве подслова одно из слов $x_1, \dots, x_n$;
   (c) Множество слов, не содержащих 01;

2. Привести пример бесконечного регулярного множества, которое невозможно получить однократным использованием итерации.

3. Пусть X — регулярное множество в алфавите $\{a_1, \dots, a_m\}$; $Y_1, \dots Y_m$ — регулярные множества в алфавите $\{b_1, \dots, b_n\}$. Доказать, что множество $S^{a_1 \dots a_m}_{Y_1 \dots Y_m} X$ слов, получаемых одновременной заменой букв $a_1, \dots, a_m$ в любом слове из X любыми словами из $Y_1, \dots, Y_n$ соответственно является регулярным.

4. Пусть X — регулярное множество, $\mathrm{Rev}(X)$ — множество обращений слов из X. Доказать, что оно тоже будет регулярным.

5. Пусть X — конечно-автоматное множество в алфавите A, Y — конечно-автоматное множество в однобуквенном алфавите. Обозначим через X/Y множество тех слов из X, длины которых являются длинами слов из Y. Доказать, что множество X/Y конечно-автоматно.

Семинар 4

Детерминированные функции. Построение диаграмм Мура и канонических уравнений. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава IV]: 1.1 (1, 3, 8, 9), 1.2 (1), 2.1 (1, 6, 16), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

На дом. Из [7, глава IV]: 1.1 (4, 6, 9, 13), 1.2 (2), 2.1 (3, 7), 2.4 (1, 3), 2.5 (3).

Семинар 5

Операции суперпозиции и обратной связи. Построение схем из автоматных элементов. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава IV]: 2.8 (3, 6), 2.9 (4), 2.13 (1, 4), 2.14 (1, 4), 2.17 (1, 4).

На дом. Из [7, глава IV]: 2.8 (5, 8), 2.9 (5), 2.13 (6, 11), 2.14 (2, 5), 2.17 (2, 5).

Семинар 6

Машины Тьюринга. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике.

В классе. Из [7, глава V]: 1.8 (1, 3), 1.4 (2); 1.14 (1, 2, 3, 4, 9, 10), 1.15 (2, 7).

На дом. Из [7, глава V]: 1.8 (2, 6), 1.4 (4), 1.14 (5, 6, 7, 12), 1.15 (4, 6).

Семинар 7

Примитивно-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 78].

В классе. Из [7, глава V]: 2.1 (9, 10, 12), 2.2 (1, 3); применить операцию примитивной рекурсии к частичным функциям $g(x) = 2x$ и $h(x, y, z) = z - 2$; 2.3 (9, 10, 5), 2.4 (1, 2, 5, 7б).

На дом. Из [7, глава V]: 2.1 (2, 4), 2.4 (3, 7а), 2.3 (7, 8, 9).

Семинар 8

Операции ограниченного суммирования и мультиплицирования. Операция минимизации. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 102–107].

В классе. Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $\lfloor x/y \rfloor$, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$, $\lfloor \log_a x \rfloor$, «число делителей x», «число решений полиномиального уравнения в заданном промежутке».

Из [7, глава V]: 2.5 (1, 2, 3, 7, 11), 2.7 (2, 6).

На дом. Используя операции $\prod_{i\leqslant x}$ и $\sum_{i\leqslant x}$ доказать примитивную рекурсивность функций $p(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, где

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — простое число.} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$f_1(x)$ — количество чисел вида y^y на отрезке $[0, x]$. $f_2(x)$ — количество чисел вида $2^y \cdot 3^z$ на отрезке $[0, x]$.

Из [7, глава V]: 2.5 (4, 10, 13), 2.7 (3, 5).

Семинар 9

Частично-рекурсивные функции. Теоретический материал и примеры решения задач имеются в задачнике. См. также [1, с. 108–113].

В классе. Из [7, глава V]: 2.8 (1, 2, 5).

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f^{-1}(x)$, где f — общерекурсивная перестановка (биективная функция) на $\mathbb{N}_0$;
2. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \{a_1, \ldots, a_m\}, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}_0;$
3. $f(x) = \begin{cases} x, & f_1(x) \geqslant f_2(x), \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $f_1(x), f_2(x)$ — примитивно-рекурсивные функции;
4. x/y;
5. $\sqrt{x}$;
6. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть две единицы на расстоянии } x+1, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

На дом. Из [7, глава V]: 2.8 (3).

Доказать частичную рекурсивность функций:

1. $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ входит в пересечение областей значений} \\ & \text{частично-рекурсивных функций } g_1(z), g_2(z), \\ \text{не определено}, & \text{иначе;} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ входит в область значений функции } g, \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, например $z^2, 2^z$;

3. $x - y$;

4. $\log_2 x$;

5. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{в последовательности } g \text{ есть } x+1 \text{ идущих подряд единиц,} \\ \text{не определено}, & \text{иначе,} \end{cases}$

   $g(z)$ — примитивно-рекурсивная функция, принимающая значения $0, 1$ (двоичная последовательность).

Семинар 10

Класс P. Теоретический материал имеется в задачнике.

В классе. Из [8]: 2.3 (2, 4, 5, 7); доказать, что задача определения существенных переменных у функции, заданной таблицей значений, может быть выполнена на машине Тьюринга за полиномиальное время; 2.19 (7), 2.20 (1а, 2а, 2д, 3а, 4а).

На дом. Из [8]: 2.3 (6, 8, 9, 10), 2.19 (1), 2.20 (1г, 2г, 3г).

Семинар 11

P-сводимость и NP-полнота. Теоретический материал имеется в задачнике.

В классе и на дом. Из [8]: 2.18 (1), 2.19 (4), 2.20 (1б, 1в, 2б, 3в), 2.11(1, 2), 2.7(2(1, 2)).

Семинар 12

Постановка задачи синтеза схем для ФАЛ (операторов) из специальных классов, мощностные характеристики этих классов и соответствующие нижние оценки функций Шеннона для их сложности. Инвариантные и квазиинвариантные классы ФАЛ, их структурное описание и особенности, поведение мощностных последовательностей. Теоретический материал [4, §§1,11].

В классе.

1. Выяснить, какие из следующих классов ФАЛ (операторов) являются невырожденными, и получить нижние мощностные оценки (НМО) функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из данных классов СФЭ в стандартном базисе:

   (a) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = 0$;

   (b) Q — класс ФАЛ, симметричных по БП x_1, x_2, x_3;

   (c) Q — класс ФАЛ, монотонных по БП x_1, x_2;

   (d) Q — класс ФАЛ, равных 0 на наборах с чётном числом 1;

   (e) Q — класс линейных ФАЛ;

(f) Q — класс самодвойственных ФАЛ;

(g) Q — класс симметрических ФАЛ;

(h) Q — класс операторов вида $F = (f_1, f_2, f_3)$ таких, что $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$ при $i \neq j$ и $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \equiv$ $\equiv 1$.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество класса линейных ФАЛ.

На дом.

1. Исследовать на невырожденность и, в случае невырожденности, установить асимптотику НМО функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где:

   (a) Q — класс ФАЛ, равных 1 при $x_1 = x_2 = 1$;

   (b) Q — класс ФАЛ, монотонных по x_1 и антимонотонных по x_2;

   (c) Q — класс ФАЛ, у которых любая подфункция от БП x_1, x_2 принадлежит множеству $\{\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ x_1,\ x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;

   (d) Q — класс ФАЛ, симметричных по своим $n, n = 1, 2, \ldots$ существенным БП с рабочими числами вида $a, a+4, a+8, \ldots, a+4k$, где $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $k = \lfloor (n-a)/4 \rfloor$;

   (e) Q — класс операторов $F = (f_1, f_2)$ таких, что $f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bar{f}_1(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где набор $\tilde{\beta}$ имеет номер на единицу больше, чем набор $\tilde{\alpha}$, если $\tilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, и равен нулевому набору в противном случае.

2. Выделить среди классов ФАЛ из п. 1 квазиинвариантные и инвариантные классы, для которых найти пределы соответствующих им мощностных последовательностей.

3. Найти порождающее множество инвариантного класса ФАЛ, состоящего из констант и всех монотонных элементарных конъюнкций.

Семинар 13

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов, установление асимптотики соответствующих функций Шеннона. Теоретический материал [4, §§2–5].

В классе. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в классной задаче 1 семинара 12.

На дом. Установить асимптотическое поведение функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ (операторов) от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса Q, где Q — один из невырожденных классов, указанных в домашней задаче 1 семинара 12.

Семинар 14

Сложность не всюду определённых функций, их использование при синтезе схем для ФАЛ из специальных классов. Теорема Храпченко. Теоретический материал [4, §§6–10].

В классе.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1222)$.
2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не меньше $n/2$ единиц.
3. Доказать, что $12 \leqslant L^\pi(s_4^2) \leqslant 16$, где s_n^I — симметрическая ФАЛ от n БП, «рабочие» числа которой составляют множество I, $I \subseteq [0, n]$.
4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/2$.

На дом.

1. Найти сложность не всюду определённой ФАЛ f, $f \in \hat{P}_2(3)$, для которой $\tilde{\alpha}_f = (0111\,2221)$.
2. Найти асимптотику функции Шеннона $L^C(Q(n))$ для сложности реализации ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ из класса $Q(n)$, включающего в себя все те ФАЛ, которые обращаются в ноль на наборах куба B^n, имеющих не равное i, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ число единиц.
3. Доказать, что $63 \leqslant L^\pi(s_8^{\{2,4,6\}}) \leqslant 80$.
4. Доказать, что $L^\pi((x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_s)(x_{s+1} \oplus \ldots \oplus x_n)) \geqslant n^2/3$, где $1 \leqslant k < s < n$.