

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 21

Монотонность и транзитивность
отношения логического следования

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Монотонность следования в ЛП

Для любых множеств предложений Γ , Δ
и любого предложения φ верно:

$$\Gamma \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \cup \Delta \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верно $\Gamma \models \varphi$

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma \cup \Delta$$

\Rightarrow (по определению модели)

для любой формулы ψ из $\Gamma \cup \Delta$ верно $\mathcal{I} \models \psi$

\Rightarrow (т.к. $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$)

для любой формулы ψ из Γ верно $\mathcal{I} \models \psi$

\Rightarrow (по определению модели)

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \varphi$)

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

Значит, любая модель $\Gamma \cup \Delta$ является моделью φ , то есть $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$ ▼

Монотонность \vee относительно следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ
и любых формул $\varphi(\tilde{x}^n)$, $\psi(\tilde{x}^n)$ верно:

$$\Gamma \models \forall \tilde{x}^n \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \forall \tilde{x}^n (\varphi \vee \psi)$$

Доказательство

Пусть $\Gamma \models \forall \tilde{x}^n \varphi$

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следствия и т.к. $\Gamma \models \forall \tilde{x}^n \varphi$)

$$\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n \varphi$$

\Rightarrow (по семантике \forall)

для любого набора предметов \tilde{d}^n верно $\mathcal{I} \models \varphi[\tilde{d}^n]$

\Rightarrow (по семантике \vee)

для любого набора предметов \tilde{d}^n верно $\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi)[\tilde{d}^n]$

\Rightarrow (по семантике \forall)

$$\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n (\varphi \vee \psi)$$

Значит, любая модель Γ является моделью $\forall \tilde{x}^n (\varphi \vee \psi)$ \blacktriangledown

Транзитивность следования в ЛП

Для любого множества предложений Γ
и любых предложений $\psi_1, \dots, \psi_k, \varphi$ верно:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \models \psi_1 \\ \dots \\ \Gamma \models \psi_k \\ \psi_1, \dots, \psi_k \models \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

Доказательство

Пусть верны все соотношения слева от « \Rightarrow »

Тогда для любой интерпретации \mathcal{I} верно:

$$\mathcal{I} \models \Gamma$$

\Rightarrow (по определению логического следования)

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \text{ и } \dots \text{ и } \mathcal{I} \models \psi_k$$

\Rightarrow (по определению модели множества формул)

$$\mathcal{I} \models \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$$

\Rightarrow (по определению логического следования)

$$\mathcal{I} \models \varphi \blacktriangledown$$