

Математические методы верификации схем и программ

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические методы верификации схем и программ

Блок 24

Символьные представления моделей

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь

Вступление

Базовый алгоритм проверки моделей для CTL

- ▶ идеологически прост: сводит задачу проверки выполнимости формулы на модели к набору хорошо известных задач теории графов:
 - ▶ выделение компонент сильной связности,
 - ▶ проверка достижимости вершин
 - ▶ ...
- ▶ теоретически эффективен: его сложность полиномиальна с невысокой степенью (без учёта алгоритма вычисления н.к.с.с. — линейна) относительно размеров модели и формулы

Вступление

Но у базового алгоритма есть и недостатки

Для примера можно представить *относительно небольшую* систему из 20 процессов, в каждом из которых содержится 20 булевых переменных

В такой системе будет более 10^{120} состояний (чтобы осознать, насколько это много: больше, чем гугол)

В базовом алгоритме граф модели хранится **явно и полностью**, что приводит к неразумному и даже невозможному расходу памяти

А можно ли сократить расход памяти, представив модель более эффективно?

Вступление

Напоминание: конечная модель Кripке $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$ — это

- ▶ конечное множество состояний S
- ▶ конечное множество начальных состояний S_0
- ▶ отношение переходов на паре конечных множеств состояний \rightarrow
- ▶ функция разметки, сопоставляющая каждому состоянию конечное множество L

Другое напоминание:

- ▶ $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (будем использовать 0 как синоним f и 1 как синоним t)
- ▶ **Булева функция** местности n — это функция $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$

Символьные представления

Символьные представления — это семейство эффективных представлений структур (графовых и не только), становящееся всё более популярным в практике «умного» программирования, и коротко можно описать его так:

1. Представляемый объект переписывается (кодируется) как совокупность множеств наборов нолей и единиц заданной длины
2. Каждое множество наборов нолей и единиц длины представляется булевой функцией, принимающей значение 1 на наборах этого множества
3. Выбирается подходящее представление получающихся булевых функций в зависимости от природы исходных объектов и от того, как с ними предполагается взаимодействовать (*этот пункт необязателен, пока речь не идёт о программной реализации*)
4. Символьное представление объекта — это совокупность представлений булевых функций, кодирующих объект, и реализация требуемых операций над объектом в терминах булевых функций

Символьное представление графа

Начнём с простого **примера**: опишем символьное представление конечного ориентированного графа $G = (V, E)$, где V — это конечное множество вершин и $E \subseteq V \times V$ — множество дуг (двуместное отношение на множестве вершин)

Для этого научимся символьно представлять конечные множества (как здесь V) и конечные двуместные отношения на представленных символьно множествах (как здесь E)

Для начала представим символьно множество V

Сопоставим элементам V уникальные числа, их **номера**:

- ▶ если нумерация уже задана, то используем её,
- ▶ а иначе пронумеруем элементы по своему усмотрению

Например, $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 1$, и вершине v_i отвечает номер $\mathbf{n}(v_i) = i$ (далее в примерах будем использовать эту нумерацию)

Как-либо выберем такое количество разрядов k , в которое вмещается двоичная запись наибольшего рассматриваемого числа

Например, $k = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$

Символьное представление графа

Заменим каждый номер i на его двоичную запись $(i)_2^k$ в k разрядах

В результате получим множество $V_{\mathbb{B}}$ наборов нолей и единиц длины k , представляющее множество V

Например, $V_{\mathbb{B}} = \{(0)_2^k, (1)_2^k, (2)_2^k, \dots, (n)_2^k\}$

Характеристическая функция множества $X \subseteq \mathbb{B}^k$ — это функция $f : \mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$, такая что $f(\tilde{\alpha}) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \in X$

Перейдём от множества $V_{\mathbb{B}}$ к его характеристической функции f_V

Например, для $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ эта функция задаётся так:

$$f_V((i)_2^k) = 1 \Leftrightarrow i \leq n$$

Будем считать, что переменные этой функции устроены так:

$$f_V(x_{k-1}, \dots, x_1, x_0)$$

Представим как-либо эту функцию — (но так обычно не делают, но)

например, в виде совершенной ДНФ

Такое представление множества V (какая-либо форма представления функции f_V) будем называть **стандартным символьным**

Символьное представление графа

Теперь научимся представлять символьно отношение $E \subseteq V \times V$, имея нумерацию элементов V

Перейдём от множества пар E к множеству номеров элементов этих пар: $E_{\mathbb{B}} = \{((\mathbf{n}(v))_2^k, (\mathbf{n}(w))_2^k) \mid (v, w) \in E\} \subseteq \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^k$

Характеристическая функция двуместного отношения $R \subseteq \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^k$ — это функция $f : \mathbb{B}^{2k} \rightarrow \mathbb{B}$, такая что $f(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1 \Leftrightarrow (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in R$

Перейдём от отношения $E_{\mathbb{B}}$ к его характеристической функции f_E

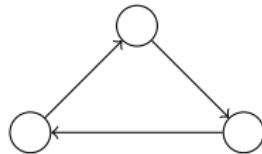
Будем считать, что переменные этой функции устроены так:

$$f_E(x_{k-1}, \dots, x_1, x_0, x'_{k-1}, \dots, x'_1, x'_0)$$

Какое-либо представление этой функции будем называть **стандартным символьным представлением** отношения E

Символьное представление графа

Например:



Закодируем вершины числами 0 (левая), 1 (верхняя) и 2 (правая)

Запишем эти числа двоично в двух разрядах: $(0)_2^2 = (00)$, $(1)_2^2 = (01)$, $(2)_2^2 = (10)$

Характеристическую функцию множества $\{(00), (01), (10)\}$, отвечающего вершинам, можно представить формулой

$$\neg(x_1 \& x_0)$$

Характеристическую функцию отношения

$$\{((00), (01)), ((01), (10)), ((10), (00))\},$$

отвечающего дугам, можно представить формулой

$$\neg x_1 \& \neg x_0 \& \neg x'_1 \& x'_0 \vee \neg x_1 \& x_0 \& x'_1 \& \neg x'_0 \vee x_1 \& \neg x_0 \& \neg x'_1 \& \neg x'_0$$

Символьное представление графа — это пара написанных выше формул

Символьное представление модели Кripке

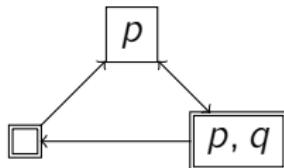
Конечную модель Кripке $M = (S, S_0, \rightarrow, L)$ над множеством AP можно представить как набор следующих конечных множеств и отношений:

- ▶ S — конечное множество
- ▶ $S_0 \subseteq S$
- ▶ $\rightarrow \subseteq S \times S$
- ▶ Множество $S_p = \{s \mid s \in S, p \in L(s)\} \subseteq S$ для каждого $p \in AP$

Символьным представлением модели Кripке будем называть совокупность стандартных представлений для S, S_0, \rightarrow и S_p для каждого $p \in AP$ для общей нумерации элементов S и общего числа разрядов k

Символьное представление модели Кripке

Например ($AP = \{p, q\}$)



Пример символьного представления этой модели Кripке для нумерации состояний 0 (левое), 1 (верхнее), 2 (правое) и двух разрядов:

- ▶ Множество состояний: $\neg(x_1 \& x_0)$
- ▶ Множество начальных состояний: $\neg x_0$
- ▶ Отношение переходов:
$$\neg x_1 \& (\neg x_0 \& x'_1 \& \neg x'_0 \vee \neg x_0 \& x'_1 \& x'_0) \vee x_1 \& \neg x_0 \& \neg x'_1$$
- ▶ Множество S_p : $x_0 \oplus x_1$
- ▶ Множество S_q : $x_1 \& \neg x_0$

Операции над символьными представлениями

Мало уметь записывать множества как булевы функции, обычно требуется уметь их строить и применять к ним теоретико-множественные операции

Стандартное представление \emptyset : f

Стандартное представление $\{i\}$ — это элементарная конъюнкция, представляющая характеристическую функцию этого множества

Если φ_1 — представление множества S_1 и φ_2 — представление множества S_2 , то:

- ▶ $S_1 \cup S_2$ представляется как $\varphi_1 \vee \varphi_2$
- ▶ $S_1 \cap S_2$ представляется как $\varphi_1 \& \varphi_2$
- ▶ $S_1 \setminus S_2$ представляется как $\varphi_1 \& \neg\varphi_2$

Откуда берутся символические представления (пример)

Чтобы развеять впечатление о том, что символьное представление модели Кripке — это «неестественная» конструкция, необходимая только в технических целях, приведём пример, когда такое представление возникает прежде «явного» (а *ещё лучше это будет заметно в обязательном задании по средству NuSMV*)

Представим себе императивную программу над переменными $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, каждая из которых принимает значения из конечного множества D (**домена**)

Считая переменные упорядоченными по номерам, будем считать **состоянием данных** набор значений $(d_1, \dots, d_n) \in D^n$

Состоянием управления будем считать значение **счётчика команд** — особой переменной pc , принимающей значения из конечного множества D_{pc} и значение которой — это *номер команды*, которая будет выполняться следующей

Тогда **состояния вычисления** — это элементы множества $D^n \times D_{pc}$

Откуда берутся символьные представления (пример)

Каждое «элементарное» утверждение о значениях переменных и счётчике команд: $v_i = k$, $v_i = v_j$, $pc = k$ — можно трактовать как сокращение для булевой формулы, описывающей такое равенство для двоичных записей значений переменных

Например, если переменной v_2 сопоставлены переменные x_3, x_4, x_5 (от младшего разряда к старшему), то выражение $v_2 = 3$ — это сокращение для формулы $\neg x_5 \ \& \ x_4 \ \& \ x_3$

Остальные («производные») соотношения между значениями переменных и счётчика команд аналогично можно считать сокращениями для соответствующих булевых формул

Состоянию данных и состоянию вычисления естественно сопоставляются конъюнкции таких выражений

Например, состоянию данных $(2, 3, 5)$ для переменных v_1, v_2, v_3 соответствует формула $\varphi = (v_1 = 2) \ \& \ (v_2 = 3) \ \& \ (v_3 = 5)$, а этой оценке и значению счётчика команд 5 — формула $\varphi \ \& \ (pc = 5)$

Откуда берутся символические представления (пример)

Если состояние данных, с которого программа начинает вычисление, однозначно определено, то множество начальных состояний модели задаётся формулой, отвечающей этому состоянию и начальному значению счётчика команд (обычно — 0)

Если нет, то семейство допустимых оценок нередко естественно записывается в виде формулы (предусловия)

Самый простой и при этом полезный вид атомарных высказываний для рассматриваемой программы — это высказывания вида $v_i = k$

Множество состояний S_p , которые размечены высказыванием $p = (v_i = k)$, задаётся формулой $v_i = k$

Откуда берутся символические представления (пример)

Множество **переходов**, определяемых для команды C **операционной семантикой**, как правило, легко выражается в виде формулы ψ_C над двумя комплектами переменных: «обычные» для текущих значений переменных и текущего значения счётчика команд, и «штрихованные» — для значений переменных и счётчика команд после выполнения C

Например, переходы для команды $x := y + 1$; программы над $\{x, y\}$ задаются формулой $(x' = y + 1) \& (y' = y) \& (pc' = pc + 1)$:

- ▶ Следующее значение переменной x — это текущее значение переменной y плюс один
- ▶ Значение переменной y не изменяется
 - ▶ **Важно!** — если вычеркнуть множитель « $y' = y$ », то это будет означать «выбор следующего значения y не влияет на истинность формулы», то есть «значение y может произвольно измениться при выполнении команды»
- ▶ Управление передаётся команде со следующим номером

Откуда берутся символьные представления (пример)

Для примера рассмотрим программу $x := x + 1$; $y := x + y$; над переменными x , y с доменом \mathbb{B} , и условимся, что значение счётчика команд 0 указывает на первое присваивание, 1 — на второе, и 2 означает, что программа завершилась

Счётчику команд pc сопоставим булевы переменные pc_0 (младший разряд) и pc_1 (старший разряд)

Тогда:

- ▶ Множество состояний представляется формулой $\neg(pc = 3)$
- ▶ Множество переходов представляется формулой
 - $(pc = 0) \& (x' \oplus x) \& (y' \leftrightarrow y) \& (pc' = pc + 1) \vee$
 - $(pc = 1) \& (x' \leftrightarrow x) \& (y' \leftrightarrow (x \oplus y)) \& (pc' = pc + 1) \vee$
 - $(pc = 2) \& (x' \leftrightarrow x) \& (y' \leftrightarrow y) \& (pc' = pc)$
- ▶ Утверждения о значениях pc «раскодируются» так:
 - $(pc = 0) \sim (\neg pc_1 \& \neg pc_0)$ $(pc = 1) \sim (\neg pc_1 \& pc_0)$
 - $(pc = 2) \sim (pc_1 \& \neg pc_0)$ $(pc = 3) \sim (pc_1 \& pc_0)$
 - $(pc' = pc) \sim ((pc_1 \leftrightarrow pc'_1) \& (pc_0 \leftrightarrow pc'_0))$
 - $(pc' = pc + 1) \sim ((pc'_1 \leftrightarrow (pc_1 \oplus pc_0)) \& (pc'_0 \oplus pc_0))$

Откуда берутся символические представления (пример)

Для самостоятельного размышления:

а как выглядят формулы, задающие семантику всех других команд императивных программ из блока 3 для «естественной» арифметики с переполнением?

(Это осознать не очень сложно, но весьма полезно)