Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

Лекции по основам кибернетики

Вариант 2015 г. (гр. 318), глава 4

Москва 2015

Оглавление

Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкретное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно пытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно пытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюнктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

Глава 4

Надежность и контроль управляющих систем

§1 Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их постороения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание)

Рассмотрим вопрос повышения надежности схем на примере т. н. самокорректирующихся КС. Будем считать, что контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: состояние *обрыва*, когда контакт не проводит, и состояние *замыкания*, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p, q) - самокорректирующейся КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ. Обозначим через $\mathcal{U}^K_{(p,q)}$ множество всех (p, q) - самокорректирующхся КС и заметим, что $\mathcal{U}^K_{(0,0)} = \mathcal{U}^K$. Заметим, также, что для любой КС Σ КС $\Sigma^{(p,q)}$, получающаяся из Σ в результате замены любого ее контакта вида x_i^σ π-схемой, состоящей из $(q + 1)$ последовательно соединенного пучка, каждый из которых, включает в себя $(p+1)$ параллельно соединенный контакт вида x_i^σ, принадлежит $\mathfrak{U}^K_{(p,q)}$.

Построение КС $\Sigma^{(p,q)}$, основанное на последовательном и (или) параллельном дублировании контактов КС Σ, является простейшим способом получения самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной КС. Он дает следующую тривиальную верхную оценку сложности самокорректирующихся КС, эквивалентных данной.

Лемма 1.1. *Для любых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \mathfrak{U}^K_{(p,q)}$, для которой*

$$L(\Sigma') \leqslant (p+1)(q+1)L(\Sigma).$$

Рассмотрим, далее, нетривильный способ построения $(1,0)$- или $(0,1)$-самокорректирующихся КС, связанный с коррекцией одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах. Этот метод был впервые предложен в работе С. В. Яблонского и Ю. Г. Потапова, а также в работе Х. А. Мадатяна (см., например, [31]).

Будем называть *однородной* любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Заметим, что в любой такой КС, состоящей из контактов вида x_i^σ, ФАЛ проводимости между любыми двумя полюсами равна x_i^σ. Отсюда следует, в частности, что любые две однородные КС, состоящие из контактов одного типа и имеющие один и тот же набор полюсов, эквивалентны.

Обозначим через $C_m(x_i^\sigma)$ $(Z_m(x_i^\sigma))$ m-полюсную однородную КС, которая состоит из m контактов вида x_i^σ и представляет собой цикл, проходящий через все полюса (соответсвенно звезду из контактов, соединяющих ее центр с полюсами). Очевидно, что $C_m(x_i^\sigma) \in \mathfrak{U}^K_{(1,0)}$ и $Z_m(x_i^\sigma) \in \mathfrak{U}^K_{(0,1)}$.

Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть *однородным* *разбиением* КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma_1, ..\Sigma_\zeta$ - однородное разбиение КС Σ, а эквивалентная ей КС Σ' (КС Σ'') получается из КС Σ в результате замены каждой подсхемы Σ_i эквивалентной ей КС Σ_i' вида C_m (соответственно КС Σ_i'' вида Z_m), то $\Sigma' \in \mathcal{U}^K_{(1,0)}$ (соответственно $\Sigma'' \in \mathcal{U}^K_{(0,1)}$). Заметим, что при этом

$$L(\Sigma_i') \leqslant L(\Sigma_i) + 1,\ L(\Sigma_i'') \leqslant L(\Sigma_i) + 1$$

и, следовательно,

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta,\ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta$$

Указанный нетривиальный способ построения $(0, 1)$- или $(1, 0)$-самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной, дает следующую оценку их сложности.

Лемма 1.2. *Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1, 0)$- и $(0, 1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответственно такие, что*

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma),\ L(\Sigma'') \leqslant L(\Sigma) + \zeta(\Sigma). \tag{1.1}$$

Этот способ позволяет установить асимптотику функции Шеннона для сложности КС из $\mathcal{U}^K_{(0,1)}$ и $\mathcal{U}^K_{(1,0)}$.

Для ФАЛ f и $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ определим ее (p, q)-самокорректирующуюся контактную сложность $L^K_{(p,q)}(f)$ как минимальную сложность КС Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}^K_{(p,q)}$, реализующей f, а затем введем соответствующую функцию Шеннона

$$L^K_{(p,q)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^K_{(p,q)}(f).$$

Очевидно, что

$$L^K(f) \leqslant L^K_{(p,q)}(f) \text{ и } L^K(n) \leqslant L^K_{(p,q)}(n) \tag{1.2}$$

так как $\mathcal{U}^K_{(p,q)} \subseteq \mathcal{U}^K$.

Теорема 1.1. *Для $n = 1, 2, \ldots$ имеет место следующие асимптотические равенства*

$$L^K_{(1,0)}(n) \sim L^K_{(0,1)}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемые нижние оценки для функций Шеннона $L^K_{(1,0)}(n)$ и $L^K_{(0,1)}(n)$ вытекают из (1.2) и мощностных нижних оценок функции Шеннона $L^K(n)$ из теоремы 2.1 главы 3.

Для получения соответствующих верхних оценок возьмем произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим для нее КС Σ_f по теореме 8.1 главы 3. Из замечания к этой теореме вытекает, что при указанных там значениях параметров

$$\zeta(\Sigma_f) = o(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$$

и поэтому, в соответствии с леммой 1.2 и (1.1), существуют КС $\Sigma'_f \in \mathfrak{U}^K_{(1,0)}$ и КС $\Sigma''_f \in \mathfrak{U}^K_{(0,1)}$, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$.

Теорема доказана. □

Для построения нетривиальных КС, корректирующих более одного обрыва или замыкания, можно использовать следующую конструкцию. Пусть КС Σ_i, $i = 1, \ldots, r$, реализует ФАЛ f и корректирует t_i обрывов (замыканий), тогда КС Σ, которая получается в результате параллельного (последовательного) соединения $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, реализует ФАЛ f с коррекцией $t_1 + \ldots + t_r + r - 1$ обрывов (замыканий).

Интересный пример нетривиальной самокоррекции КС даёт контактная схема, реализующая ФАЛ ℓ_n и корректирующая один обрыв, которая получается из схемы Кардо добавлением 4 дополнительных контактов, проведенных следующим образом: для каждого σ, $\sigma \in B$, из входа (выхода) этой схемы, проведем контакт вида x_n^σ (соответственно x_1^σ)

в вершину, соединенную контактом вида $x_n^{\bar{\sigma}}$ (соответственно $x_1^{\bar{\sigma}}$) с ее выходом (соответственно входом). Указанная схема является минимальной в силу леммы 2.1 главы 3 и, следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 1.3. *Для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеют место равенства*

$$L_{(0,1)}^{K}\left(\ell_n\right) = L_{(0,1)}^{K}\left(\bar{\ell}_n\right) = 4n.$$

Литература

[1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.

[3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.

[4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.

[5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова.* Т. 1. М.: Наука, 1974.

[7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.

[8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

[9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.

[10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5-44.

[11] *Кузъмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39

[12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.

[13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

[15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.

[16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.

[17] *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования.

// Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[18] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

[19] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.

[20] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.

[21] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.

[22] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.

[23] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.

[24] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.

[25] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.

[26] *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.

[27] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИ АН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.

[28] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.

[29] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[30] *Яблонский С. В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.

[31] *Яблонский С. В.* Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

[32] *Cardot C.* Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.

[33] *Shannon C. E.* The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).

[34] *Wegener I.* Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.