

Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

Осенний семестр 2019–2020 уч. г.
группы 311–319

Лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.su)

Информационная поддержка курса:

[http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_\(2-й_поток,_3_курс\)](http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс))

III. Синтез и сложность управляющих систем

15. Задача синтеза. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

Утверждение 15.1 Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \dots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, и π -схема Σ_f , которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2n \cdot |N_f| - 1, \quad L(\Sigma_f) \leq n |N_f|,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

Следствие 1. В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать π -схемой сложности 2, а также формулой из \mathcal{U}^Φ , имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^C(n) \leq L^\Phi(n) \leq n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^K(n) \leq L^\pi(n) \leq n \cdot 2^n.$$

Следствие 2.

$$D(n) \leq n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Утверждение 15.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют π -схема Σ_f и формула \mathcal{F}_f , $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^\Phi$, которые реализуют f и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leq 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leq 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

Следствие

$$L^\pi(n) \leq 2^{n+1} - 2,$$
$$L^\Phi(n) \leq 3 \cdot 2^n - 4.$$

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка n , то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\bar{\ell}_n$;
2. мультиплексорная ФАЛ μ_n порядка n ;
3. дешифратор \vec{Q}_n (дизъюнктивный дешифратор \vec{J}_n) порядка n ;
4. универсальная система $\vec{P}_2(n)$ порядка n , состоящая из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

Утверждение 15.3 Для любого натурального n в \mathcal{U}_B^C существует универсальная СФЭ порядка n , сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Следствие

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \leq 2^{2^n} - n.$$

16. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

Утверждение 16.1 Если ФАЛ $f(x_1, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^C(f) \geq n - 1, \quad L^K(f) \geq n.$$

Если при этом ФАЛ f не является монотонной ФАЛ (каждая БП x_i , $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f), то

$$L^C(f) \geq n \quad (\text{соответственно } L^K(f) \geq n+k).$$

Следствие

$$L^C(\ell_n) \geq n,$$

$$L^K(\ell_n) \geq 2n,$$

$$L^C(\mu_n) \geq 2^n + n,$$

$$L^K(\mu_n) \geq 2^n + 2n.$$

Утверждение 16.2 Для системы $F = (f_1, \dots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^K(F) \geq m \quad (\text{соответственно } L_B^C(F) \geq m).$$

Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{Q}_n) \geq 2^n,$$

$$L^C(\vec{J}_n) \geq 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \geq 2^n,$$

$$L_B^C(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - n, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \geq 2^{2^n} - 2$$

Замечание В силу следствия универсальная СФЭ U_n , построенная в утв. 15.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе \mathcal{U}_B^C .

Утверждение 16.3 Если для существенной БП x_n ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) σ , $\sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma) \neq 0, 1$, то

$$L_{\&, \vee}^C(f) \geq \min\{L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=0}), L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=1})\} + 2$$

(соответственно $L_{\&, \vee}^C(f) \geq L_{\&, \vee}^C(f|_{x_n=\sigma}) + 1$).

Следствие

$$L^C(\mu_n) \geq 2^{n+1} + n - 1,$$

$$D(\mu_n) \geq n + 2.$$

Утверждение 16.4 Если система ФАЛ $F = (f_1, \dots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то

$$L^K(F) \geq 2^{1-n} \sum_{j=1}^m |N_{f_j}|.$$

Следствие $L^K(\vec{J}_n) \geq 2^{n+1} - 2$

Утверждение 16.5 Для любого натурального n выполняются неравенства:

$$L^C(\ell_n) \leq 4n - 4, \quad L^C(\bar{\ell}_n) \leq 4n - 4 + \lfloor 1/n \rfloor;$$

$$L^\pi(\mu_n) \leq 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^\Phi(\mu_n) \leq 2^{n+2} - 3;$$

$$L^C(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}), \quad L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^{n+1} - 2;$$

$$L^C(\vec{J}_n) \leq 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}).$$

Следствие

$$L^C(\vec{Q}_n) \sim L^C(\vec{J}_n) \sim 2^n.$$

17. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

Утверждение 17.1. Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F , F' и F'' — матрицы, реализуемые КС Σ , Σ' и Σ'' соответственно. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие 1. В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС Σ , $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' .

Следствие 2. Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или КС Σ' разделительна по выходам.

Замечание. Отождествление входов (выходов) у раздельной по входам (выходам) КС дает раздельную по рассматриваемой группе полюсов КС.

18. Каскадные контактные
схемы и схемы из
функциональных элементов.
Метод каскадов и примеры
его применения, метод
Шеннона

Утверждение 18.1 Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то существует $(1, m)$ -ККС Σ'' , которая реализует систему ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Утверждение 18.2 Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^K(\ell_n^\sigma) \leq 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \quad L^K(\vec{P}_2(n)) \leq 2 \cdot 2^{2^n},$$
$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+2} - 6.$$

Утверждение 18.3 Для функций Шеннона $L^K(n)$ и $L^C(n)$ выполнены соотношения:

$$L^K(n) \lesssim 4 \frac{2^n}{n}, \quad L^C(n) \lesssim 8 \frac{2^n}{n}.$$

19. Нижние мощностные оценки функций Шеннона, их обобщение на случай синтеза схем для ФАЛ из специальных классов

Утверждение 19.1 Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \dots, 4$, и $n = 1, 2, \dots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geq 0$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при n стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:

$$L^K(f) \geq \left(1 - \varepsilon_1(n)\right) \frac{2^n}{n}, \quad L^C(f) \geq \left(1 + \varepsilon_2(n)\right) \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(f) \geq \left(1 - \varepsilon_3(n)\right) \frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geq n - \log \log n - \varepsilon_4(n).$$

Следствие

$$D(n) \geq \lceil n - \log \log n - o(1) \rceil,$$

$$L^C(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^\Phi(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^K(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

Утверждение 19.2

Для класса ФАЛ \mathcal{Q} такого, что

$$n = o\left(\frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}\right)$$
$$(\log n = o(\log \log |\mathcal{Q}(n)|)),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}$$

$$(\text{соответственно } L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log |\mathcal{Q}(n)|}{\log \log |\mathcal{Q}(n)|}).$$

20. Дизъюнктивно-
универсальные множества
функций. Асимптотически
наилучший метод
О. Б. Лупанова для синтеза
схем из функциональных
элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Утверждение 20.1 Для любых натуральных p , m и s , где $p = \lceil \frac{2^m}{s} \rceil$, существует стандартное ДУМ G порядка m и высоты s , которое является ДУМ ранга p и для которого:

1) $\lambda = |G| \leq p2^s$;

2) система из p характеристических ФАЛ ψ_1, \dots, ψ_p ДУМ G обладает тем свойством, что для любой ФАЛ g , $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ g_1, \dots, g_p из G справедливы представления

$$g = g_1 \vee \dots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \dots \vee \psi_p g_p.$$

Утверждение 20.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ Σ_f , $\Sigma_f \in \mathcal{U}^C$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + \frac{5 \log n + O(1)}{n} \right).$$

Следствие. Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 20.1 вытекает, что

$$L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

21. Регулярные разбиения
единичного куба и
моделирование функций
переменными.

Асимптотически наилучший
метод синтеза формул в
базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

Утверждение 21.1 Для любых натуральных m , λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \dots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m -регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_{2q-m})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП x_{m+1}, \dots, x_q , либо с ее отрицанием.

Замечание. Если в условиях утверждения $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j - 1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$ на δ_j .

Утверждение 21.2 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, в \mathcal{U}^Φ существует реализующая ее формула \mathcal{F}_f , для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leq \frac{2^n}{\log n} \left(1 + \frac{2 \log \log n + O(1)}{\log n} \right),$$

$$D(\mathcal{F}_f) \leq n - \log \log n + O(1).$$

Следствие. Из этих оценок с учетом нижних оценок следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) \leq n - \log \log n + O(1).$$

22. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем. Синтез схем для ФАЛ из некоторых специальных классов

Утверждение 22.1 Для любой ФАЛ f , $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Следствие. Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 19.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание. Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

23. Синтез схем для
дешифраторов и
мультиплексоров,
асимптотически точные
оценки их сложности.

Утверждение 23.1 Для $n = 1, 2, 3, \dots$
выполняются неравенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \leq 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^K(\vec{J}_n) \leq 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

Следствие. Оценки утверждения 23.1 и следствия из следствия из утверждений 16.2, 16.4 дают асимптотические равенства

$$L^K(\vec{Q}_n) \sim 2^n, \quad L^K(\vec{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

Утверждение 23.2 Для $n = 1, 2, \dots$
выполняются неравенства

$$L^\pi(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$L^C(\mu_n) \leq 2 \cdot 2^n + O(2^n/n),$$

$$D(\mu_n) \leq n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ μ_n и неповторная по информационным БП формула \mathcal{M}_n с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

Следствие. Из полученных оценок в силу следствий из утверждения 16.3 вытекает, что

$$L^C(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \quad D(\mu_n) = n + O(1).$$