# Лекция 9. Раскраски. Эквивалентность раскрасок по группе. Теорема Пойа. Примеры.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

# Раскраски

Пусть $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ — множество цветов.

**Раскраской** элементов множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ в $k$ цветов называется отображение

$$f : N \to C.$$

Множество всех раскрасок элементов множества $N$ в $k$ цветов обозначим $F_{n,k}$.

**Предложение 1.** $|F_{n,k}| = k^n$.

# Эквивалентность раскрасок

Пусть $G$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S_n$ и $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определим отношение $R_G$ на множестве $F_{n,k}$: если $f_1, f_2 \in F_{n,k}$, то

$$R_G(f_1, f_2) \Leftrightarrow \ \exists \pi \in G : \ \forall x \in N \ \ f_2(x) = f_1(\pi(x)).$$

## Эквивалентность раскрасок

**Предложение 2**. *Отношение $R_G$ является отношением эквивалентности на множестве $F_{n,k}$.*

# Эквивалентность раскрасок

**Доказательство**. Свойства отношения эквивалентности.

1) Рефлексивность. Для любой раскраски $f \in F_{n,k}$ верно $f(\pi_e(x)) = f(x)$, поэтому $R_G(f, f)$.

2) Симметричность. Пусть для раскрасок $f_1, f_2 \in F_{n,k}$ верно $R_G(f_1, f_2)$, т. е. найдется такая перестановка $\pi \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi(x))$. Тогда

$$f_2(\pi^{-1}(x)) = f_1(\pi(\pi^{-1}(x))) = f_1(x),$$

поэтому $R_G(f_2, f_1)$.

# Эквивалентность раскрасок

3) Транзитивность. Пусть для раскрасок $f_1$, $f_2$, $f_3 \in F_{n,k}$ верно $R_G(f_1, f_2)$ и $R_G(f_2, f_3)$, т. е. найдутся такие перестановки $\pi_1 \in G$ и $\pi_2 \in G$, что $f_2(x) = f_1(\pi_1(x))$ и $f_3(x) = f_2(\pi_2(x))$. Тогда

$$f_1((\pi_1 \circ \pi_2)(x)) = f_1(\pi_1(\pi_2(x))) = f_2(\pi_2(x)) = f_3(x).$$

Т. к. $G$ — группа, $\pi_1 \circ \pi_2 \in G$, поэтому $R_G(f_1, f_3)$.

$\square$

# Эквивалентность раскрасок

Отношение эквивалентности $R_G$ обозначается $\sim_G$.

Если для раскрасок $f_1, f_2 \in F_{n,k}$ верно $f_1 \sim_G f_2$, то говорят, что раскраски $f_1$ и $f_2$ **эквивалентны по группе** $G$.

# Пример: раскраски вершин правильного треугольника

**Пример**. Рассмотрим раскраски вершин правильного треугольника в два цвета: красный и синий.
Тогда раскраски

$$f_1 : 1 \to \text{красный}, \;\; 2, 3 \to \text{синий},$$

и

$$f_2 : 3 \to \text{красный}, \;\; 1, 2 \to \text{синий},$$

эквивалентны относительно группы $H$ вращений правильного треугольника в плоскости, т. к. для перестановки $\pi = (123) \in H$ верно $f_1(\pi(x)) = f_2(x)$.
А раскраски $f_1$ и

$$f_3 : 1, 2 \to \text{красный}, \;\; 3 \to \text{синий},$$

неэквивалентны относительно группы $H$. Почему?

# Орбита раскраски

Для раскраски $f \in F_{n,k}$ ее **орбитой** в группе $G$ называется класс эквивалентности этой раскраски по отношению эквивалентности $\sim_G$.

Обозначение: $O_f$,

$$O_f = \{f(\pi(x)) \mid \pi \in G\}.$$

Число различных орбит (относительно группы $G$) — число неэквивалентных раскрасок (относительно группы $G$).

В каких случаях возникают такие задачи?

# Подсчет числа ожерелий

Задача подсчета **числа ожерелий**.

Сколько различных ожерелий можно составить из $n$ бусин $k$ цветов?
Два ожерелья считаются **одинаковыми**, если одно из них получается из другого вращением в плоскости (без зеркальных отражений).

Эта задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** вершин правильного $n$-угольника в $k$ цветов относительно группы $G$ вращений этого $n$-угольника в плоскости.

# Классификация конечных функций

Задача подсчета **числа классов эквивалентностей** $k$**-значных функций**.

Сколько найдется различных функций алгебры логики, зависящих от $n$ переменных, каждая из которых **не может быть получена** из другой навешиванием отрицаний над переменными?

**Например**, пусть $n = 2$. Тогда функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus x_1 = x_1 \bar{x}_2$$

могут быть получены одна из другой навешиванием отрицаний над переменными, а функции

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 \text{ и } f_3(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$$

не могут (почему?).

# Классификация конечных функций

Заметим, что каждая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ определяет на множестве $E_2^n$ **раскраску** его элементов (наборов) **в два цвета**: 0 и 1.

Поэтому задача состоит **в подсчете числа орбит раскрасок** наборов множества $E_2^n$ в 2 цвета (0 или 1) относительно некоторой группы перестановок $G$, где $G$ — подгруппа $S_{2^n}$.

Эта группа перестановок наборов из $E_2^n$ называется **группой инвертирования переменных** (или **группой сдвигов**) $J_n$.

# Теорема Пойа

Метод решения таких задач предлагает **теорема Пойа**.

Сначала докажем вспомогательную лемму.

## Вспомогательная лемма

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S_n$, $\pi \in G$ и $f \in F_{n,k}$. Равенство $f(x) = f(\pi(x))$ выполняется тогда и только тогда, когда для каждого цикла перестановки $\pi$ все его элементы* **окрашены в один и тот же цвет** *раскраской $f$.*

# Вспомогательная лемма

**Доказательство**. 1. Пусть $f(x) = f(\pi(x))$.

Предположим обратное: пусть найдутся такие $a, b \in N$, принадлежащие одному циклу перестановки $\pi$, что $f(a) \neq f(b)$. Можно считать, что $b = \pi(a)$.

Тогда
$$f(b) = f(\pi(a)) = f(a) \neq f(b).$$

# Вспомогательная лемма

2. Пусть все элементы каждого цикла перестановки $\pi$ окрашены в один и тот же цвет раскраской $f$.

Тогда если $a, b \in N$ из одного цикла перестановки $\pi$, то

$$f(b) = f(a).$$

Поэтому

$$f(x) = f(\pi(x)).$$

$\square$

# Теорема Пойа (частный случай)

Теперь рассмотрим частный случай теоремы Пойа.

**Теорема 1 (Д. Пойа).** **Число** $N(G;k)$ *орбит по группе перестановок* $G$ *раскрасок элементов множества* $N$ *в* $k$ *цветов можно найти следующим образом:*

$$N(G;k) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} k^{\lambda_1(\pi)}\cdot\ldots\cdot k^{\lambda_n(\pi)} = Z_G(t_1 = k, \ldots, t_n = k),$$

*где* $Z_G(t_1,\ldots,t_n)$ *– цикловой индекс группы перестановок* $G$.

# Теорема Пойа

**Доказательство.** Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ и $M = F_{n,k}$, где $F_{n,k} = \{f_1, \ldots, f_{k^n}\}$.

Для каждой перестановки $\pi \in G$ построим соответствующую ей перестановку $\Pi_\pi \in S_{k^n}$:

$$\Pi_\pi = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_{k^n}(x) \\ f_1(\pi(x)) & f_2(\pi(x)) & \ldots & f_{k^n}(\pi(x)) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$T = \{\Pi_{\pi_1}, \ldots, \Pi_{\pi_m}\}.$$

# Теорема Пойа

Проверим, что $H(G) = (T; \circ)$ является группой.

Применим критерий подгруппы. Пусть $\pi_i, \pi_j \in G$, рассмотрим перестановку $\Pi_{\pi_i} \circ \Pi_{\pi_j}^{-1}$.

Т. к. $G$ — группа, верно $\pi_j^{-1} \in G$.

Тогда для любой раскраски $f \in M$ получаем

$$\begin{aligned}(\Pi_{\pi_i} \circ \Pi_{\pi_j}^{-1})(f(x)) &= (\Pi_{\pi_i} \circ \Pi_{\pi_j^{-1}})(f(x)) = \\ &= \Pi_{\pi_i}(\Pi_{\pi_j^{-1}}(f(x))) = f(\pi_i(\pi_j^{-1}(x))) = \\ &= f((\pi_i \circ \pi_j^{-1})(x)) = (\Pi_{\pi_i \circ \pi_j^{-1}})(f(x)).\end{aligned}$$

Т. к. $G$ — группа, верно $\pi_i \circ \pi_j^{-1} = \pi_l \in G$, откуда $\Pi_{\pi_i \circ \pi_j^{-1}} = \Pi_{\pi_l}$.

Значит, $\Pi_{\pi_i} \circ \Pi_{\pi_j}^{-1} \in T$.

Следовательно, $H(G) = (T; \circ)$ — подгруппа группы $S_{k^n}$.

# Теорема Пойа

Итак, $H(G) = (T; \circ)$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S_{k^n}$.

Рассмотрим **действие** группы перестановок $H(G)$ на множестве $M$.

Если $\pi \in G$ и $f \in M$, то

$$\Pi_\pi(f(x)) = f(\pi(x)) \in M.$$

# Теорема Пойа

Если $f_i, f_j \in M$, то $f_i$ и $f_j$ эквивалентны по группе $H(G)$ в том и только в том случае, когда найдется такая перестановка $\pi \in G$, что

$$\Pi_\pi(f_i(x)) = f_j(x),$$

т. е.

$$f_j(x) = f_i(\pi(x)).$$

Но это означает, что **раскраски** $f_i$ и $f_j$ эквивалентны по группе $G$.

Значит,

$$f_i \sim_G f_j \;\Leftrightarrow\; f_i \sim_{H(G)} f_j.$$

# Теорема Пойа

Следовательно, число орбит $N(G;k)$ раскрасок элементов множества $N$ в $k$ цветов **совпадает** с числом орбит $N(H(G))$ элементов множества $M$ по группе $H(G)$, т. е.

$$N(G;k) = N(H(G)).$$

По лемме Бернсайда

$$N(H(G)) = \frac{1}{|H(G)|}\sum_{\pi\in G}\lambda_1(\Pi_\pi).$$

Из $|H(G)| = |G|$ находим:

$$N(H(G)) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\lambda_1(\Pi_\pi).$$

# Теорема Пойа

Осталось для каждой перестановки $\pi \in G$ найти $\lambda_1(\Pi_\pi)$.

Что означает, что раскраска $f \in M$ образует цикл длины 1 перестановки $\Pi_\pi$?

Это означает, что
$$f(\pi(x)) = f(x).$$

Значит, для каждой перестановки $\pi \in G$ нужно подсчитать число таких раскрасок $f \in M$, что $f(\pi(x)) = f(x)$.

# Теорема Пойа

Пусть $\pi \in G$. Подсчитаем число таких раскрасок $f \in M$, что $f(\pi(x)) = f(x)$.

По лемме 1 равенство $f(x) = f(\pi(x))$ верно тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки $\pi$ **окрашены в один и тот же цвет** раскраской $f$.

Значит, для каждого из циклов перестановки $\pi$ найдется только $k$ возможностей окрасить его элементы.

Поэтому таких раскрасок в точности

$$k^{\lambda_1(\pi)} \cdot k^{\lambda_2(\pi)} \cdot \ldots \cdot k^{\lambda_n(\pi)}.$$

# Теорема Пойа

Следовательно,

$$N(G;k) = N(H(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} k^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot k^{\lambda_n(\pi)},$$

или

$$N(G;k) = Z_G(t_1 = k, \ldots, t_n = k).$$

$\square$

# Пример: подсчет числа ожерелий

**Пример**. Найдем число различных ожерелий из 3-х бусин 2-х цветов. Т. е. найдем число орбит раскрасок в два цвета вершин правильного треугольника по группе $H$ его вращений в плоскости.

# Пример: подсчет числа ожерелий

По теореме Пойа

$$N(H;2) = Z_H(t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 2).$$

Напомним, что

$$Z_H(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}(t_1^3 + 2t_3).$$

Тогда

$$N(H;2) = \frac{1}{3}(2^3 + 2 \cdot 2) = 4.$$

Какие раскраски определяют эти орбиты?

1) Все вершины красные; 2) две вершины красные, одна синяя; 3) одна вершина красная, две синие; 4) все вершины синие.

# Пример: классификация функций алгебры логики

**Пример**. Найдем число таких различных функций алгебры логики, зависящих от 2-х переменных, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой навешиванием отрицаний над переменными.

Найдем цикловой индекс группы $J_2$:

| $x$<br>$x_1x_2$ | | $\pi_1(x)$<br>$x_1x_2$ | $\pi_2(x)$<br>$x_1\bar{x}_2$ | $\pi_3(x)$<br>$\bar{x}_1x_2$ | $\pi_4(x)$<br>$\bar{x}_1\bar{x}_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | | 00 | 01 | 10 | 11 |
| 01 | | 01 | 00 | 11 | 10 |
| 10 | | 10 | 11 | 00 | 01 |
| 11 | | 11 | 10 | 01 | 00 |

Получаем, что $\lambda(\pi_1) = (4, 0, 0, 0)$, и $\lambda(\pi_i) = (0, 2, 0, 0)$ при $i = 2, 3, 4$.

# Пример: классификиция функций алгебры логики

Следовательно,

$$Z_{J_2}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{4}(t_1^4 + 3t_2^2).$$

По теореме Пойа

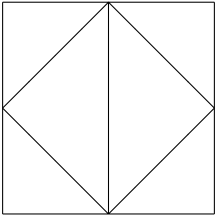
$$N(J_2; 2) = Z_{J_2}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{4}(2^4 + 3 \cdot 2^2) = 7.$$

Какие это функции? Здесь они перечислены:

$$0;\ 1;\ x_1;\ x_2;\ x_1 x_2,\ x_1 \oplus x_2;\ x_1 \vee x_2.$$

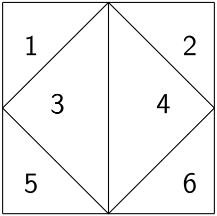
# Пример: подсчет числа витрин

**Пример**. Найдем число различных раскрасок частей прозрачной витрины



в красный, синий и зеленый цвета относительно ее вращений в пространстве.

# Пример: подсчет числа витрин




Найдем цикловой индекс группы $G$ вращений этой витрины в пространстве.

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \lambda(\pi_1) &= (6,0,0,0,0,0),\\
\pi_2 &= (1,6)(2,5)(3,4) & \lambda(\pi_2) &= (0,3,0,0,0,0),\\
\pi_3 &= (1,2)(3,4)(5,6) & \lambda(\pi_3) &= (0,3,0,0,0,0),\\
\pi_4 &= (1,5)(2,6)(3)(4) & \lambda(\pi_4) &= (2,2,0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Значит, $Z_G(t_1,\ldots,t_6) = \frac{1}{4}(t_1^6 + 2t_2^3 + t_1^2 t_2^2)$.

# Пример: подсчет числа витрин

По теореме Пойа

$$N(G;3) = Z_G(t_1 = 3, \dots, t_6 = 3).$$

Следовательно,

$$N(G;3) = \frac{1}{4}\cdot(3^6 + 2\cdot 3^3 + 3^2\cdot 3^2) = \frac{3^3}{4}\cdot(27+2+3) = 27\cdot 8 = 216.$$

Отметим, что число всех раскрасок частей этой витрины в 3 цвета равно $3^6 = 729$.

# Подсчет числа ожерелий с ограничениями

Теорема Пойа позволяет подсчитать число ожерелий из $n$ бусин $k$ цветов.

Как найти число различных ожерелий из 5 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых ровно одна белая бусина?

Или, как подсчитать число различных ожерелий из 7 бусин 3-х цветов — красного, синего и белого, в которых не менее 3-х красных бусин?

Ответ предлагает **общий случай теоремы Пойа**.

# Раскраски

Пусть $G$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S_n$.

Пусть $C$ — множество цветов, $|C| = k$, и $f : N \to C$ — раскраска элементов из $N$ в $k$ цветов.

Множество всех раскрасок элементов из $N$ в $k$ цветов обозначается $F_{n,k}$

Раскраски $f_1, f_2 \in F_{n,k}$ **эквивалентны по группе** $G$ ($f_1 \sim_G f_2$), если

$$\exists \pi \in G : \forall x \in N \; f_2(x) = f_1(\pi(x)).$$

# Многочлен цветов

Пусть на множестве цветов $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ задана функция **весов** $w : C \to \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Пусть $w(c_j) = x_j$ — **вес** цвета $c_j \in C$, $j = 1, \ldots, k$.

Тогда выражение

$$q(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + \ldots + x_k$$

назовем **многочленом цветов**.

# Вес раскраски

Определим **вес** $w(f)$ раскраски $f \in F_{n,k}$:

$$w(f) = \prod_{x \in N} w(f(x)).$$

Отметим, что если $f \in F_{n,k}$ — раскраска и $\pi \in S_n$, то

$$w(f(x)) = w(f(\pi(x))).$$

# Вес раскраски

**Пример**. Пусть $C = \{0, 1, 2\}$ — множество цветов и $w : C \to \mathbb{Z}$ — функция весов,

| $c \in C$ | $w(c)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | $x$ |

Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — множество вершин правильного треугольника и $f : N \to C$ — раскраска,

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | 2 | 2 |

Тогда

$$w(f) = w(f(1)) \cdot w(f(2)) \cdot w(f(3)) = x^2.$$

# Вес орбиты раскраски

Если $f_1 \sim_G f_2$, то $w(f_1) = w(f_2)$.

Поэтому введем **вес орбиты** $O_f$ как вес любого ее элемента, т. е.

$$w(O_f) = w(f).$$

# Многочлен раскрасок

Пусть $G$ — подгруппа симметрической группы перестановок $S_n$.

Пусть $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ — множество цветов с весами $x_1, \dots, x_k$.

Пусть $W$ — множество возможных весов орбит раскрасок из $F_{n,k}$ в группе $G$ и $\varphi_w$ — **число** орбит раскрасок веса $w$, $w \in W$.

Тогда выражение

$$\Phi(x_1, \dots, x_k) = \sum_{w \in W} w \cdot \varphi_w$$

назовем **многочленом раскрасок**.

# Теорема Пойа (общий случай)

Рассмотрим общий случай **теоремы Пойа**.

**Теорема 2 (Д. Пойа)**. **Сумму** $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$ **весов** *орбит по группе перестановок* $G$ *раскрасок элементов множества* $N$ *в* $k$ *цветов с весами* $x_1, \ldots, x_k$ *можно найти следующим образом:*

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \ldots, x_k) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \prod_{i=1}^{n} (q(x_1^i, \ldots, x_k^i))^{\lambda_i(\pi)} = \\ &= Z_G(t_1 = q(x_1, \ldots, x_k), \ldots, t_n = q(x_1^n, \ldots, x_k^n)),\end{aligned}$$

*где* $Z_G(t_1, \ldots, t_n)$ *– цикловой индекс группы перестановок* $G$ *и* $q(x_1, \ldots, x_k)$ *— многочлен цветов.*

# Теорема Пойа

**Доказательство**. Пусть $W$ — множество возможных весов орбит раскрасок и $\varphi_w$ — **число** орбит раскрасок веса $w$, $w \in W$.

Тогда

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{w \in W} w \cdot \varphi_w.$$

# Теорема Пойа

Пусть $G = \{\pi_1 = e, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ и $M = F_{n,k}$.

Пусть $M_w$ — множество всех раскрасок из $M$ веса $w$, где $w \in W$, причем $|M_w| = m_w$. Понятно, что $M = \bigcup\limits_{w \in W} M_w$.

Для каждого веса $w$ и для каждой перестановки $\pi \in G$ построим соответствующую им перестановку $\Pi_{w,\pi} \in S_{m_w}$:

$$\Pi_{w,\pi} = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_{m_w}(x) \\ f_1(\pi(x)) & f_2(\pi(x)) & \dots & f_{m_w}(\pi(x)) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$T_w = \{\Pi_{w,\pi_1}, \dots, \Pi_{w,\pi_m}\}.$$

# Теорема Пойа

Аналогично доказательству частного случая теоремы Пойа устанавливаем, что:

1) $H_w(G) = (T_w; \circ)$ является группой;

2) если $f_i, f_j \in M_w$, то **раскраски** $f_i$ и $f_j$ эквивалентны по группе $G$ в том и только в том случае, когда **раскраски** $f_i$ и $f_j$ эквивалентны по группе $H_w(G)$.

# Теорема Пойа

Следовательно, число $\varphi_w$ орбит раскрасок из $M_w$ по группе $G$ **совпадает** с числом $N(H_w(G))$ орбит элементов множества $M_w$ по группе $H_w(G)$, т. е.

$$\varphi_w = N(H_w(G)).$$

По лемме Бернсайда

$$N(H_w(G)) = \frac{1}{|H_w(G)|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_{w,\pi}).$$

Из $|H_w(G)| = |G|$ находим:

$$\varphi_w = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_{w,\pi}).$$

# Теорема Пойа

Итак,

$$\varphi_w = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_{w,\pi}).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{w \in W} w \cdot \varphi_w = \\
&= \sum_{w \in W} w \cdot \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \lambda_1(\Pi_{w,\pi}) = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{w \in W} w \cdot \lambda_1(\Pi_{w,\pi}).
\end{aligned}$$

# Теорема Пойа

Осталось для каждого веса $w \in W$ и для каждой перестановки $\pi \in G$ найти $\lambda_1(\Pi_{w,\pi})$.

Что означает, что раскраска $f \in M_w$ образует цикл длины 1 перестановки $\Pi_{w,\pi}$?

Это означает, что

$$f(\pi(x)) = f(x).$$

Значит, выражение

$$\sum_{w \in W} w \cdot \lambda_1(\Pi_{w,\pi})$$

равно сумме весов раскрасок, которые перестановка $\pi$ оставляет на месте.

Т. е. для каждой перестановки $\pi \in G$ нужно подсчитать **сумму весов** таких раскрасок $f \in M$, что $f(\pi(x)) = f(x)$.

# Теорема Пойа

Пусть $\pi \in G$. Подсчитаем **сумму весов** таких раскрасок $f \in M$, что $f(\pi(x)) = f(x)$.

По лемме 1 равенство $f(x) = f(\pi(x))$ верно тогда и только тогда, когда все элементы каждого цикла перестановки $\pi$ **окрашены в один и тот же цвет** раскраской $f$.

Значит, для каждого из циклов длины $i$ перестановки $\pi$ вклад весов цветов его элементов в вес раскраски может быть равен только $x_j^i$.

Поэтому вес любой такой раскраски может быть равен только

$$x_{j_{1,1}} \dots x_{j_{1,\lambda_1(\pi)}} x_{j_{2,1}}^2 \dots x_{j_{2,\lambda_2(\pi)}}^2 \dots x_{j_{n,1}}^n \dots x_{j_{n,\lambda_n(\pi)}}^n.$$

Поэтому сумма весов всех таких раскрасок равна в точности

$$(x_1 + \dots + x_k)^{\lambda_1(\pi)} \cdot (x_1^2 + \dots + x_k^2)^{\lambda_2(\pi)} \cdot \dots \cdot (x_1^n + \dots + x_k^n)^{\lambda_n(\pi)}.$$

# Теорема Пойа

Следовательно,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} (x_1 + \ldots + x_k)^{\lambda_1(\pi)} \cdot \ldots \cdot (x_1^n + \ldots + x_k^n)^{\lambda_n(\pi)},$$

или

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = Z_G(t_1 = q(x_1, \ldots, x_k), \ldots, t_n = q(x_1^n, \ldots, x_k^n)).$$

$\square$

# Примеры

Рассмотрим примеры подсчета раскрасок с ограничениями.

# Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

**Пример**. Подсчитаем число различных ожерелий из 5-ти бусин красного, синего и *белого* цветов, в которых **ровно одна** *белая* бусина.

# Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

*Решение*. Найдем цикловой индекс группы $H_5$ вращений правильного пятиугольника в плоскости:

$$Z_{H_5}(t_1, \ldots, t_5) = \frac{1}{5}(t_1^5 + 4t_5).$$

Введем функцию $w$ весов цветов:

$$w(\text{красный}) = w(\text{синий}) = 1, \;\; w(\textit{белый}) = x.$$

Получаем многочлен цветов:

$$q(x) = 2 + x.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(x) = Z_{H_5}(q(x), q(x^2), q(x^3), q(x^4), q(x^5)) = \frac{1}{5}((2+x)^5 + 4(2+x^5)).$$

# Пример: подсчет числа ожерелий с ограничениями

Вес раскраски «**ровно одна** *белая* бусина» равен $x^1$.

Поэтому в многочлене

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}((2+x)^5 + 4(2+x^5))$$

надо найти коэффициент $\varphi_1$ при $x^1$.

Получаем: $\varphi_1 = \frac{1}{5} \cdot C_5^4 \cdot 2^4 = 16$.

Значит, найдется 16 ожерелий с одной *белой* бусиной.

# Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

**Пример**. Подсчитаем число различных раскрасок граней правильного тетраэдра в красный, синий и зеленый цвета, при которых найдется не менее одной красной грани и не более одной синей грани.

# Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

*Решение*. Найдем цикловой индекс группы $G$ вращений правильного тетраэдра в пространстве:

$$Z_G(t_1, \ldots, t_4) = \frac{1}{12}(t_1^4 + 8t_1t_3 + 3t_2^2).$$

Введем функцию весов цветов $w$:

$$w(\text{зеленый}) = 1, \; w(\text{красный}) = x, \; w(\text{синий}) = y.$$

Получаем многочлен цветов:

$$q(x, y) = 1 + x + y.$$

По теореме Пойа

$$\Phi(x, y) = Z_G(q(x, y), q(x^2, y^2), q(x^3, y^3), q(x^4, y^4)),$$

т. е.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{12}((1+x+y)^4+8(1+x+y)(1+x^3+y^3)+3(1+x^2+y^2)^2).$$

# Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Но

$$\Phi(x,y) = \sum_w w \cdot \varphi_w = \sum_{(s_1,s_2)} \varphi_{(s_1,s_2)} \cdot x^{s_1} y^{s_2},$$

где $\varphi_{(s_1,s_2)}$ — число орбит раскрасок веса $x^{s_1} y^{s_2}$.

Условию «не менее одной красной грани и не более одной синей грани» подходят $\varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{3,0}, \varphi_{4,0}$ и $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}$.

Поэтому в многочлене

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{12}((1+x+y)^4 + 8(1+x+y)(1+x^3+y^3) + 3(1+x^2+y^2)^2)$$

надо найти коэффициенты при $x, x^2, x^3, x^4, xy, xy^2, xy^3$.

# Пример: подсчет раскрасок тетраэдра с ограничениями

Итак,

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{12}((1+x+y)^4+8(1+x+y)(1+x^3+y^3)+3(1+x^2+y^2)^2)$$

и надо найти коэффициенты при $x, x^2, x^3, x^4, xy, xy^2, xy^3$.

Получаем:

$$\begin{aligned}
x &: \quad \frac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1,\\
x^2 &: \quad \frac{1}{12}\cdot(6+0+6)=1,\\
x^3 &: \quad \frac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1,\\
x^4 &: \quad \frac{1}{12}\cdot(1+8+3)=1,\\
xy &: \quad \frac{1}{12}\cdot(12+0+0)=1,\\
xy^2 &: \quad \frac{1}{12}\cdot(12+0+0)=1,\\
xy^3 &: \quad \frac{1}{12}\cdot(4+8+0)=1.
\end{aligned}$$

Значит, найдется 7 таких раскрасок тетраэдра.

# Литература к лекции

1. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 57–61.

2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. С. 273–275.