Математические модели и методы логического синтеза СБИС

Осень 2022

Лекция 5

План лекции

- Комбинационные логические сети (КЛС)
  - Булевское деление
  - Локальная оптимизация вершин при помощи незначащих наборов (don’t care)

Ограничения алгебраического деления

- Делитель и частное ортогональны – у них нет общих переменных
- В некоторых случаях можно получить более оптимальное разложение. Пусть:

$$f = (g_1 + g_2 + \ldots + g_n)\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_m)$$

  - g_i и h_j могут иметь общие литералы
    - Использование непоглощенных литералов

      abe+ace+abd+cd / (ae+d) = ∅

      Но: aabe+ace+abd+cd / (ae+d) = (ab+c)

  - g_i и h_j могут иметь общие противоположные литералы
    - Использование непоглощенных «нулевых» ЭК

      a’b+ac+bc / (a’+c) = ∅

      Но: a’a+a’b+ac+bc / (a’+c) = (a+b)

Булевское деление

Определение:

g называется булевским делителем f, если существуют h и r, такие что

$$f = gh + r,\ gh \neq 0.$$

g называется булевским фактором f, если, дополнительно,

$$r = 0 \text{ (то есть } f = gh).$$

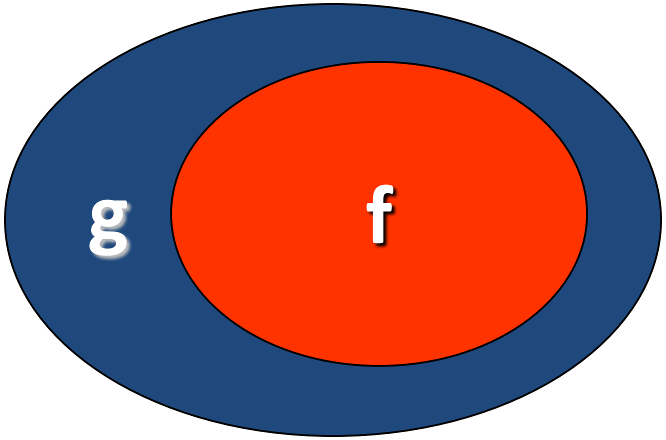
- h называется частным.
- r называется остатком.
- h и r могут быть не уникальными.

Булевское деление

Утверждение:

Булевская функция g является булевским фактором функции f тогда и только тогда, когда

$$f \subseteq g \text{ (или } fg' = 0\text{, или } g' \subseteq f'\text{).}$$



Булевское деление

Доказательство:

$\Rightarrow$: g булевский фактор f. Тогда $\exists h$, такое что $f = gh$;
Следовательно, $f \subseteq g$ (а также h).

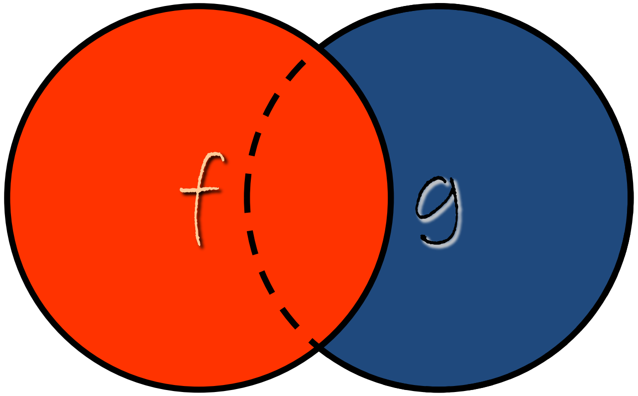
$\Leftarrow$: $f \subseteq g \Rightarrow f = gf = g(f + r) = gh$. (r – любая функция, такая что $r \subseteq g'$.)

Примечания:

- $h = f$ является допустимым.
- Для заданных f и g выбор h не является уникальным.
- Нахождение оптимального h эквивалентно нахождению оптимального $f + r$. Так как $rg = 0$, то это эквивалентно минимизации f с учетом того, что менять значение f на наборах, где g обращается в 0.
- Наборы, где $g=0$, не значащие (англ. Don’t care или, сокращенно, DC).

Булевское деление

Утверждение: g является булевским делителем f тогда и только тогда, когда $fg \neq 0$.



Булевское деление

Доказательство:

$\Rightarrow$: f = gh + r, gh $\neq$ 0 $\Rightarrow$ fg = gh + gr. Так как gh $\neq$ 0, то fg $\neq$ 0.

$\Leftarrow$: Пусть fg $\neq$ 0. f = fg + fg’ = g(f + k) + fg’. (Здесь k $\subseteq$ g’.)

Тогда f = gh + r, где h = f + k, r = fg’. Так как gh = fg $\neq$ 0, то gh $\neq$ 0.

Примечания:

f имеет много делителей. Мы хотим, чтобы делитель g был таким, что f = gh + r, где g, h, r являются минимальными.

Частично определенные функции

$F = (f,d,r)$ – не всюду определенная булевская функция, где

f – характеристическая функция 1 функции F;

d – характеристическая функция неопределенных значений функции F;

r – характеристическая функция 0 функции F;

Определение:

Полностью определённая булевская функция g является булевским делителем *F*, если существуют полностью определенные функции h и e, такие что

$$f \subseteq gh + e \subseteq f + d \text{ и } gh \not\subset d.$$

Определение:

g является булевским фактором *F*, если существует h, такая что

$$f \subseteq gh \subseteq f + d$$

Частично определенные функции

Утверждение:

$f \subseteq g$ тогда и только тогда, когда g булевский фактор *F*.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $f \subseteq g$ и $h = f + k$, где $kg \subseteq d$.

Тогда $hg = (f + k)\, g \subseteq (f + d)$. Из $f \subseteq g$ и $fg = f$ следует, что $f \subseteq (f + k)\, g = gh$.

Тогда

$$f \subseteq (f + k)\, g \subseteq f + d$$

$\Leftarrow$: Пусть $f = gh$.

Предположим, что $\exists$ ЭК m, такая что $f(m) = 1$, но $g(m) = 0$.

Тогда из $f(m) = 1$ и $g(m)h(m) = 0$ следует, что $f \not\subset gh$.

Противоречие.

Следовательно,

из $f(m) = 1$ следует, что $g(m) = 1$, то есть $f \subseteq g$.

Частично определенные функции

Утверждение:

$fg \neq 0$ тогда и только тогда, когда g булевский делитель *F*.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Пусть $fg \neq 0$.

Пусть $fg \subseteq h \subseteq (f + d + g')$ и $fg' \subseteq e \subseteq (f + d)$.

Тогда $f = fg + fg' \subseteq gh + e \subseteq g(f + d + g') + f + d = f + d$

Кроме того, $0 \neq fg \subseteq gh \rightarrow ghf \neq 0$.

Таким образом $gh \not\subset d$, так как иначе $ghf = 0$ (в силу $fd = 0$),

что завершает проверку определения булевского делителя.

$\Leftarrow$: Пусть g булевский делитель.

Тогда $\exists h$, такое что $gh \not\subset d$ и

$f \subseteq gh + e \subseteq f + d$

Так как $gh = (ghf + ghd) \not\subset d$, то $fgh \neq 0$. Откуда следует, что $fg \neq 0$.

Частично определенные функции

$fg \subseteq h \subseteq (f + d + g')$ $fg' \subseteq e \subseteq (f + d)$

Общая идея булевского деления: $(f \subseteq gh + e \subseteq f + d)$

- Выбираем g, такое что $fg \neq 0$.
- Минимизируем fg при помощи DC = $(d + g')$, чтобы получить h.
- Минимизируем fg' при помощи DC = $(d + fg)$, чтобы получить e.
(можем использовать DC = $d + gh$)

Таким образом:

$$fg \subseteq h \subseteq f + g' + d$$
$$fg' \subseteq e \subseteq fg' + d + fg = f + d$$

Идея алгоритма булевского деления

Для не всюду определенной $F = (f,d,r)$ найти доопределение F_0 вида $gh + e$, где h и e минимальны в некотором смысле.

Идея алгоритма:

- Создать новую переменную x, чтобы “представлять” g.
- Задать множество неопределенных значений ($D = xg' + x'g$).
  Так как $x = g$ нам «не важно», если $x \neq g$.
- Минимизируем (fD', $d + D$, $r + D'$) для получения доопределения F_0.
- Вернуть ($h = F_0/x$, e), где e остаток от деления F_0. (Просто слагаемые, которые не содержат x.)
- F_0/x обозначает слабое деление

Идея алгоритма булевского деления

- Отметим, что (fD', $d + D$, $r + D'$) является разбиением соответствующего булева куда при помощи ДНФ. Можно использовать методы минимизации ДНФ, такие как ESPRESSO.

Пример:

$f = a + bc$
$g = a + b$

$D = xa'b' + x'(a+b)$, где $x = g = (a+b)$

- Минимизировать $(a + bc)D' = (a + bc)(x'a'b' + x(a+b)) = xa + xbc$ при помощи $DC = xa'b' + x'(a+b)$
- Минимальное покрытие $a + bc$, но в нем не встречается x или x'!
- Требуется, чтобы x был в покрытии.
  Таким образом, получаем: $f = a + xc = a + (a + b)c$

Эвристика:

Находить решения, которые содержат x и имеют минимально число литералов в покрытии

Первый алгоритм булевского деления

Пусть F = (f,d,r) и D покрытие d.

Первый алгоритм:

```
Algorithm Boolean_Divide1(F,D,G) {
  D1 = D + xG' + x'G                     // (don't care)
  F1 = FD'1                              // (on-set)
  R1 = (F1 + D1)' = F'1D'1 = F'D'1       // (off-set)
  F2 = remove x' from F1
  F3 = MIN_LITERAL(F2, R1, x) // Filter for Espresso
      // (minimum literal support including x)
  F4 = ESPRESSO(F3,D1,R1)
  H = F4/x                               // (quotient)
  E = F4 - {xH}                          // (remainder)
  return (HG+E)
}
```

Второй алгоритм булевского деления

Пусть F = (f,d,r) и D покрытие d.
Второй алгоритм:

```
Algorithm Boolean_Divide2(F,D,G) {
  D1 = D + xG' + x'G                      // (don't care)
  F1 = FD'1                               // (on-set)
  R1 = (F1 + D1)' = F'1D'1 = F'D'1 // (off-set)
   // F2 = remove x' from F1   (difference to first alg.)
  F3 = MIN_LITERAL(F2, R1, x, x') // Filter for Espresso
      // (minimum literal support including x)
  F4 = ESPRESSO(F3,D1,R1)
  H1 = F4/x                              // (first quotient)
  H0 = F4/x'                             // (first quotient)
  E = F4 - ({xH1}+(x'H0})              // (remainder)
  return (GH1+G'H0+E)
}
```

Алгоритм минимальной переменной (MINVAR)

Пусть:

$F = (f,d,r)$

$F = \{c^1, c^2, \ldots, c^k\}$ (покрытие f)

$R = \{r^1, r^2, \ldots, r^m\}$ (покрытие r)

1. Строим «блокирующую» матрицу B^i для каждого c^i.
2. Конкатенируем все построенные матрицы
3. Находим минимальное строчное покрытие S матрицы B, $S = \{ j_1, j_2, \ldots, j_v \}$.
4. Модифицируем $\tilde{F} \leftarrow \{ \tilde{c}^1, \tilde{c}^2, \ldots, \tilde{c}^k \}$, где

$$B = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^k \end{bmatrix}$$

$$(\tilde{c}^i)_j = \begin{cases} (\tilde{c}^i)_j & \text{если } j \in S \\ \{0, 1\} = 2 & \text{иначе} \end{cases}$$

Построение «блокирующей» матрицы

Пусть:

$F = (f,d,r)$

$F = \{c^1, c^2, ..., c^k\}$ (покрытие f)

$R = \{r^1, r^2, ..., r^m\}$ (покрытие r)

Элементы матрицы задаются следующим образом:

$$\left(\hat{B}^i\right)_{q,j} = \begin{cases} 1 \text{ если } v_j \in c^i \text{ и } v'_j \in r^q \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\left(\hat{B}^i\right)_{q,j+n} = \begin{cases} 1 \text{ если } v'_j \in c^i \text{ и } v_j \in r^q \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Пример: $c^i = ad'e'$, $r^q = a'ce$

$$\hat{B}^i_q = \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & a' & b' & c' & d' & e' \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Пример «блокирующей» матрицы

Грань, из покрытия единиц функции: $c^i = ab'd$.

Покрытие нулей функции: $r = a'b'd' + abd' + acd' + bcd + c'd'$.

	a	**b**	**c**	**d**	**a'**	**b'**	**c'**	**d'**
a'b'd'	1	0	0	1	0	0	0	0
abd'	0	0	0	1	0	1	0	0
acd'	0	0	0	1	0	0	0	0
bcd	0	0	0	0	0	1	0	0
c'd'	0	0	0	1	0	0	0	0

- Минимальное строчное покрытие {d,b'}.
- Следовательно, b'd является максимальной импликантой, покрывающей ab'd.

Булевское деление - пример

$F = a + bc$

алгебраическое деление: $F/(a + b) = 0$

булевское деление: $F \div (a + b) = a + c$.

Пусть $x = a + b$

Создаем множество неопределенных значений: $D_1 = x'(a + b) + xa'b'$.

Модифицируем F:

$F_1 = F \cap D'_1 = (a + bc)(xa + xb + x'a'b') = ax + bcx$.

Обозначим $C = \{c^1 = ax,\ c^2 = bcx\}$

$R_1 = F'D'_1 = (a'b' + a'c')(xa + xb + x'a'b') = a'bc'x + a'b'x'$.

Обозначим $R = \{r^1 = a'bc'x,\ r^2 = a'b'x'\}$.

Блокирующая матрица (порядок переменных a, b, c, x).

$$B = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1001 \\ 0010 \\ 0101 \end{bmatrix}$$

Булевское деление - пример

$$B = \begin{bmatrix} B^1 \\ B^2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & x \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Находим минимальное покрытие {a, c, x}.
- Удаляем из F_1 переменную b. So
  $F_1 = ax + bcx = ax + cx = x(a + c)$.
- Упрощаем, таким образом получаем
  $$F_1 = a + xc.$$
- Следовательно, частное: $F_1/x = c$, а остаток: a.
  $$F = a + bc = a + cx = a + c(a + b).$$

Важно, что x должен быть включен в покрытие!

Локальная оптимизация вершин

Лекция 5

Локальная оптимизация вершин

- Задача:
  - Для заданной КЛС оптимизировать представление функций, реализуемых в ее вершинах.
- Примечание:
  - Структура КЛС уже фиксирована. Локальные оптимизация происходит после глобальной.
  - Минимизируется представление функции, реализуемой в вершине.
  - Что понимать под «оптимизацией»?

Функции, реализуемые в вершине

- В КЛС функция, реализуемая в вершине зависит от основных входов $\{x_1,.. x_n\}$ и внутренних переменных $\{y_1,.. y_m\}$, если при этом не возникает циклов.

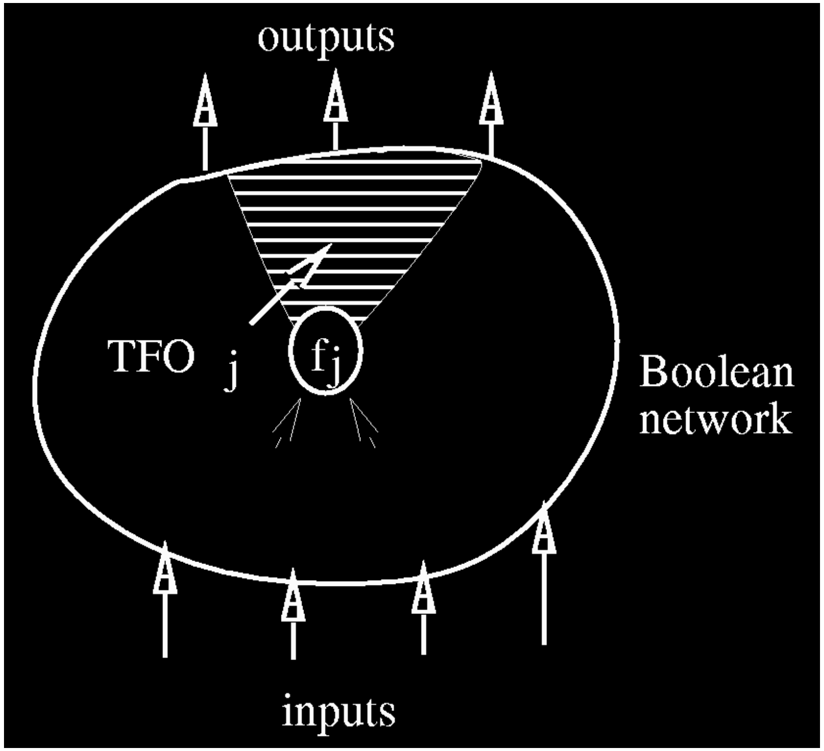
Определение:

Булева функция g_j, которая зависит от подмножества $\{x_1,.. x_n, y_1,.. y_m\}$, реализуема в вершине j, если

- Ее переменных не пересекаются с выходным конусом данной вершины (TFO_j = {вершина i, такая что i = j или $\exists$ путь из j в i})
- Замена функции в вершине j на g_j не меняет функционирования всей схемы.

Функции, реализуемые в вершине

- Множество функций, реализуемых в вершине j, порождает пространство для ее локальной оптимизации.



- TFO_j = {вершина i, такая что i = j или ∃ путь из j в i}

Тупиковые КЛС

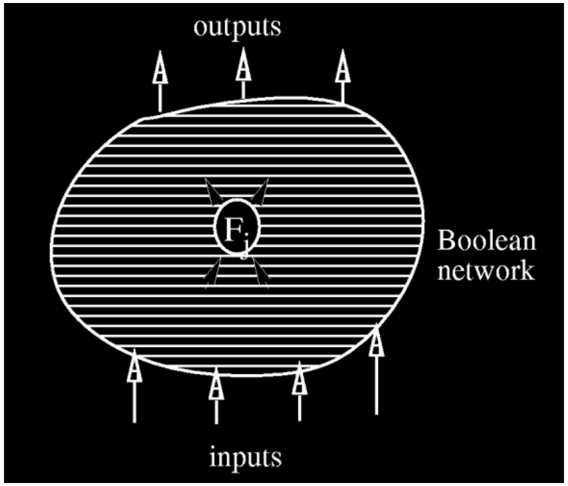
Рассмотрим ДНФ F_j, являющуюся представлением функции, реализуемой в вершине j. Обобщим определение тупиковой ДНФ на случай КЛС.

Определение:

ДНФ F_j является тупиковой, если при удалении из нее литералов или ЭК КЛС меняет свое функционирование.

Определение:

КЛС является тупиковой, если для любого j ДНФ F_j является тупиковой.



Локальная оптимизация

Цели:

- Для заданной КЛС:
  - Сделать КЛС тупиковой
  - Для каждой вершины найти минимальную ДНФ среди ДНФ, среди ДНФ, реализующих функции из множества реализуемых функций в вершине

Локальная оптимизация

Основной элемент – незначащие наборы в схеме (Network Don't Cares):

- Внешние незначащие наборы
  - XDC_k , k=1,…,p, - множество ЭК от входных переменных, заданных для каждого выхода
- Внутренние незначащие наборы – определяются из структуры КЛС
  - Незначащие наборы по выполнимости (SDC)
  - Незначащие набор по наблюдаемости (ODC)

SDC

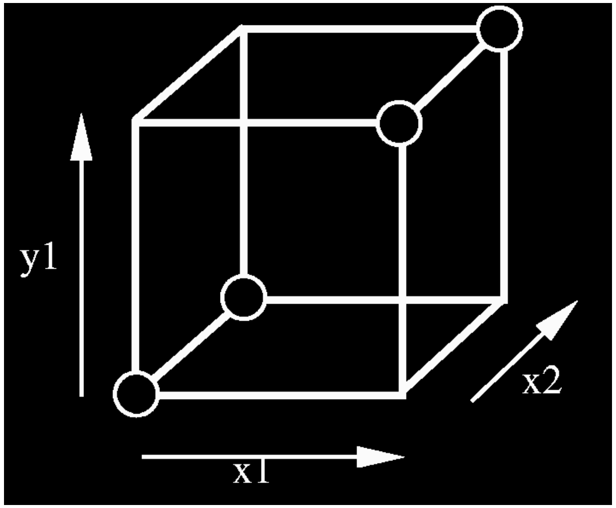
Напоминание:

- Функция, реализуемая в вершине зависит от основных входов и внутренних переменных.
  - Фактически, она задана в пространстве B^{n+m} .
- Но внутренние переменные зависят от входных переменных (зависимость задается структурой схемы).
- Таким образом не все наборы пространства B^{n+m} могут возникать в схеме:
  - Указанные наборы являются незначащими и могут быть использованы для оптимизации представления в вершинах КЛС
  - В КЛС практически всегда есть внутренние незначащие наборы, даже если не заданы внешние.

SDC - пример

Пример:

$$y_1 = F_1 = \overline{x}_1$$
$$y_j = F_j = y_1 x_2$$



- Так как $y_1 = \overline{x}_1$, то наборы на которых функция $y_1 \oplus \overline{x}_1$ обращается в 1, не возникают в КЛС.
- Эти наборы являются не значащими и могут быть использованы при задании ДНФ F_j
- $SDC = (y_1 \oplus \overline{x}_1) + (y_j \oplus y_1 x_2)$

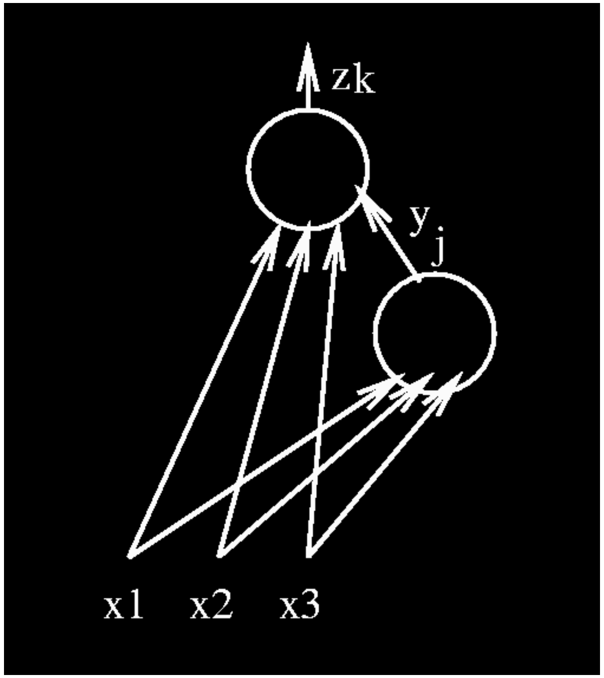
В общем случае, $SDC = \sum_{j=1}^{m} (y_j \overline{F_j} + \overline{y_j} F_j)$

Замечание: SDC $\subseteq$ B^{n+m}

ODC - пример

$y_j = x_1x_2 + x_1x_3$
$z_k = x_1x_2 + y_jx_2 + y_jx_3$

- Любая ЭК ДНФ $x_1x_2 + x_2x_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3$ определяет значение z_k независимо от значения y_j (переменная фиктивная).
- ODC y_j для z_k – множество ЭК от входных переменных для которых значение y_j ненаблюдаемо из z_k



$$ODC_{jk} = \{x \in B^n \mid z_k(x)|_{y_j=0} = z_k(x)|_{y_j=1}\}$$

Другими словами, если x $\in$ ODC$_{jk}$, то существует две эквивалентные КЛС:

- в одной $y_j = 0$
- в другой $y_j = 1$

которые вычисляют одно и тоже значение для выхода z_k

Незначащие наборы для вершины j

Определим множество DC_j незначащих наборов для вершины j как

$$DC_j = \sum_{i \notin TFO_j} (y_i \overline{F}_i + \overline{y}_i F_i) + \prod_{k=1}^{p} (ODC_{jk} + XDC_k)$$

Основной результат

Утверждение:

Множество доопределений не всюду определенной функции $\boldsymbol{F}_j = (F_j\text{-}DC_j,\ DC_j,\ \overline{F_j+DC_j})$ является множеством функций, реализуемых в вершине j

Следствие:

F_j является тупиковой тогда и только тогда, когда задает тупиковое покрытие для $\boldsymbol{F}_j$

- Минимальная ДНФ для вершины j может быть получена в результате минимизации $\boldsymbol{F}_j$.
- Тупиковая КЛС может быть получена при помощи минимизации каждой вершины j на основе множества DC_j .

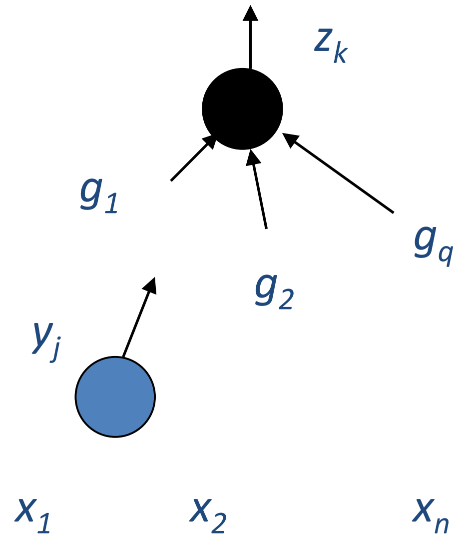
Примечание:

Если F_j меняется, то и DC_i может измениться для некоторой вершины i в КЛС.

Вычисление незначащих наборов

- Как вычислить незначащие наборы для выбранной вершины?
  - XDC задаются изначально
  - SDC вычисляются последовательно согласно топологическому порядку вершин
  - Остается вопрос как вычислить ODC?

Вычисление ODC



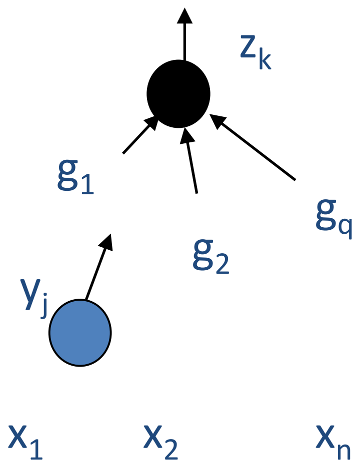
$$ODC_{jk} = \{x \in B^n \mid z_k(x)|_{y_j=0} = z_k(x)|_{y_j=1}\}$$

$$ODC_{jk} = \overline{\frac{\partial z_k}{\partial y_j}} \text{, где } \frac{\partial z_k}{\partial y_j} = z_k(x)|_{y_j=0} \oplus z_k(x)|_{y_j=1}\}$$

Можно использовать BDD для вычисления соответствующих булевых функций

Вычисление ODC

В общем случае,



$$\frac{\partial z_k}{\partial y_j} = \frac{\partial z_k}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_j} \oplus \frac{\partial z_k}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial y_j} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial z_k}{\partial g_q}\frac{\partial g_q}{\partial y_j}$$

$$\oplus \frac{\partial^2 z_k}{\partial g_1 \partial g_2}\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\frac{\partial g_2}{\partial y_j} \oplus \frac{\partial^2 z_k}{\partial g_1 \partial g_3}\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\frac{\partial g_3}{\partial y_j} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^2 z_k}{\partial g_{q-1} \partial g_q}\frac{\partial g_{q-1}}{\partial y_j}\frac{\partial g_q}{\partial y_j}$$

$$\oplus \frac{\partial^3 z_k}{\partial g_1 \partial g_2 \partial g_3}\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\frac{\partial g_2}{\partial y_j}\frac{\partial g_3}{\partial y_j} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^q z_k}{\partial g_1 \partial g_2 \ldots \partial g_q}\frac{\partial g_1}{\partial y_j}\frac{\partial g_2}{\partial y_j}\frac{\partial g_3}{\partial y_j} \ldots \frac{\partial g_q}{\partial y_j}$$