

Математическая логика

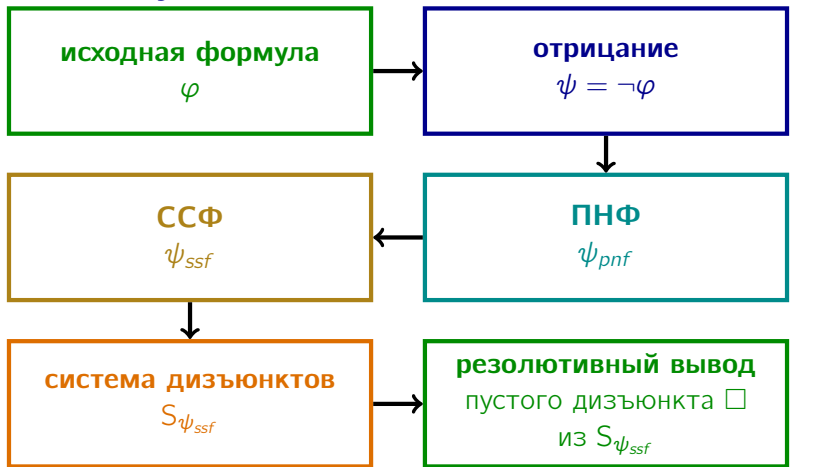
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 24

Эрбрановские интерпретации
Теорема об эрбрановских интерпретациях

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

Краткое вступление



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}} \Leftrightarrow \text{существует вывод } \square \text{ из } S_{\psi_{ssf}}$$

Последняя недостающая деталь метода — « \Leftrightarrow » на месте « \Leftarrow »

Краткое вступление

Временно забудем про метод резолюций
и попробуем выделить *общую часть* рассуждений «в лоб»
о невыполнимости системы дизъюнктов S в заданной интерпретации \mathcal{I}

Для примера рассмотрим такую систему: $S = \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$

Для обоснования невыполнимости S достаточно заметить,
что в любой модели \mathcal{I} для S предмет, описываемый термом $\mathbf{f}(\mathbf{c})$,
и обладает свойством P ($\mathcal{I} \models \forall x P(x)$), и не обладает ($\mathcal{I} \models \neg P(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$)

В этом замечании не используются
природа предметной области \mathcal{I} и устройство оценок $\bar{\mathbf{c}}$ и $\bar{\mathbf{f}}$,
и важно лишь то, каким термом задаётся «противоречивый» предмет

Если в интерпретации \mathcal{I} заменить каждый предмет
множеством основных термов, описывающих этот предмет,
и сохранить устройство оценки P , то в результате получится

эбрановская интерпретация

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановской интерпретацией (или, по-другому, — \mathcal{H} -интерпретацией) сигнатуры $\sigma = \langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$ называется интерпретация $\langle \mathcal{H}_\sigma, \overline{\text{Const}}_{\mathcal{H}}, \overline{\text{Func}}_{\mathcal{H}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$, где:

- ▶ \mathcal{H}_σ — эрбрановский универсум (\mathcal{H} -универсум): множество всех основных термов сигнатуры
 - ▶ σ , если $\text{Const} \neq \emptyset$
 - ▶ $\langle \{c_{\mathcal{H}}\}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$, если $\text{Const} = \emptyset$ ($c_{\mathcal{H}}$ — эрбрановская константа)
- ▶ $\overline{\text{Const}}_{\mathcal{H}}(c) = c$ для любой константы c из Const
- ▶ $\overline{\text{Func}}_{\mathcal{H}}(\mathbf{f})(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{f}(t_1, \dots, t_n)$
для любых $\mathbf{f}^{(n)} \in \text{Func}$ и $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_\sigma$
- ▶ $\overline{\text{Pred}}$ — произвольная оценка предикатных символов

Первые три пункта означают, что \mathcal{H} -интерпретация — это интерпретация, построенная над свободной алгеброй термов

Все \mathcal{H} -интерпретации заданной сигнатуры отличаются друг от друга только выбором оценки $\overline{\text{Pred}}$

Эрбрановские интерпретации

Эрбрановский базис ($B_{\mathcal{H}}$) — это множество всех атомов, построенных над термами \mathcal{H} -универсума

\mathcal{H} -интерпретация \mathcal{I} всегда и однозначно определяется тем, какие атомы из $B_{\mathcal{H}}$ в ней истинны, то есть множеством

$$B^{\mathcal{I}} = \{A \mid A \in B_{\mathcal{H}}, \mathcal{I} \models A\}$$

Например,

- ▶ $B^{\mathcal{I}} = \emptyset$: все основные атомы **ЛОЖНЫ** в \mathcal{I}
- ▶ $B^{\mathcal{I}} = B_{\mathcal{H}}$: все основные атомы **ИСТИННЫ** в \mathcal{I}
- ▶ $B^{\mathcal{I}} = B^{\mathcal{J}'} \cap B^{\mathcal{J}''}$: в \mathcal{I} истинны те и только те основные атомы, которые истинны в обеих интерпретациях \mathcal{J}' , \mathcal{J}''

Для удобного использования теоретико-множественной нотации иногда будем отождествлять \mathcal{H} -интерпретацию \mathcal{I} с множеством $B^{\mathcal{I}}$

Теорема об эбрановских интерпретациях

Система дизъюнктов выполнима тогда и только тогда, когда она имеет эбрановскую модель

Доказательство.

Рассмотрим произвольную систему дизъюнктов S и докажем теорему для этой системы

(\Leftarrow) Очевидно:

если S выполняется в некоторой эбрановской интерпретации то S выполняется хотя бы в одной интерпретации

(\Rightarrow)

Пусть система S выполнима

Тогда для неё существует модель $\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle$

Построим по интерпретации \mathcal{I} эбрановскую модель $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ для S той же сигнатуры σ

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow)

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Если $\text{Const} = \emptyset$, то добавим и произвольно оценим константу $\mathbf{c}_{\mathcal{H}}$ в \mathcal{I}

Поставим такое соответствие $\alpha : \mathcal{H}_{\sigma} \rightarrow D$:

$$\alpha(t) \text{ — значение термина } t \text{ в } \mathcal{I}$$

Зададим оценку $\overline{\overline{P}}$ каждого предикатного символа P в $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\overline{\overline{P}}(t_1, \dots, t_k) = \overline{P}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$$

То же самое другими словами — зададим интерпретацию $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ так:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{P(t_1, \dots, t_k) \mid P(t_1, \dots, t_k) \in B_{\mathcal{H}}, \overline{\overline{P}}(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) = \mathbf{t}\}$$

Покажем, что такая интерпретация $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ является моделью для S

Но для начала приведём пример, чтобы стало *понятнее*,

как соотносятся \mathcal{I} и $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow)

$$\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$$

Пример: рассмотрим интерпретацию \mathcal{I} сигнатуры $\langle \{0\}, \{\mathbf{s}^{(1)}\}, \{<^{(2)}\} \rangle$ с естественным арифметическим устройством:

- ▶ предметная область — множество всех целых чисел
- ▶ $\bar{0}$ — число 0;
- ▶ $\bar{\mathbf{s}}(n) = n + 1$;
- ▶ $\bar{<}$ — отношение строгого неравенства чисел

Тогда:

- ▶ $\mathcal{H}_{\sigma} = \{0, \mathbf{s}(0), \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), \dots\}$

- ▶ $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 < \mathbf{s}(0), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))), & \dots \\ 0 < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))), & \mathbf{s}(0) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))), & \mathbf{s}(\mathbf{s}(0)) < \mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(\mathbf{s}(0))))), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$

Теорема об эрбрановских интерпретациях

Доказательство. (\Rightarrow) $\mathcal{I} = \langle D, \overline{\text{Const}}, \overline{\text{Func}}, \overline{\text{Pred}} \rangle \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{H}}$

Предположим от противного, что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$

Тогда в S содержится дизъюнкт D , такой что $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models D$

Пусть, для ясности, $D = \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$,
где $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_m$ — атомы

Тогда существуют термы $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{H}_{\sigma}$, такие что

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_1[t_1, \dots, t_n] \quad \dots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models A_k[t_1, \dots, t_n] \\ \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_1[t_1, \dots, t_n] \quad \dots \quad \mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models B_m[t_1, \dots, t_n] \end{aligned}$$

По заданию интерпретации $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$, верно и

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \not\models A_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \quad \dots \quad \mathcal{I} \not\models A_k[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \\ \mathcal{I} \models B_1[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \quad \dots \quad \mathcal{I} \models B_m[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)] \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{I} \not\models \forall \tilde{x}^n (A_1 \vee \dots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m)$, что
противоречит выбору \mathcal{I} как **модели** для S

Значит, предположение « $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \not\models S$ » неверно, то есть $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \models S$ ▼