Задачи по теме «Классы P и NP, NP-полнота».

1. Пусть *входом* задачи L является слово $\alpha \in A^*$, где $A = \{0, 1\}$. Доказать, что задача L принадлежит классу P, если *вопрос* этой задачи следующий:

1) делится ли число единиц слова α на 3;

2) имеет ли слово α нечетную длину;

3) содержит ли слово α подслово 101;

4) представляет ли слово α запись степени двойки в двоичной системе счисления;

5) является ли слово α палиндромом;

6) содержит ли слово α равное число нулей и единиц;

7) в любом ли префиксе слова α число нулей не больше числа единиц;

8) является ли слово α периодическим, т. е. найдется ли такое слово $\beta \in A^*$, что $\alpha = \underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{n}$, где $n \geqslant 2$?

2. Пусть $A = \{0, 1\}$ и $L \subseteq A^*$. Доказать, что множество (язык) L принадлежит классу P, если множество L содержит все слова из A^*, которые:

1) имеют длину, не являющуюся степенью двойки;

2) являются векторами значений функций алгебры логики, не сохраняющих 1;

3) являются записями в двоичной системе счисления решений в N заданного неравенства $c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0 \geqslant d_m x^m + \ldots + d_1 x + d_0$, где $c_0, c_1, \ldots, c_n, d_0, d_1, \ldots, d_m \in N$.

4) являются построчной записью квадратных матриц из 0 и 1 с определителем, равным 1 (сложение и умножение выполняются по модулю два).

3. Пусть *входом* задачи L является ДНФ D, записанная известным образом в некотором конечном алфавите A. Доказать, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

1) существует ли набор, на котором ДНФ D равна 1;

2) существует ли набор, на котором ДНФ D равна 0;

3) существуют ли два противоположных набора, на которых ДНФ D принимает одинаковые значения;

4) представляет ли ДНФ D немонотонную функцию?

4. Пусть *входом* задачи L является граф $G = (V, E)$, заданный множеством вершин и множеством ребер, и число k. Доказать, что задача L принадлежит классу NP, если *вопрос* этой задачи следующий:

1) существует ли в графе G простой цикл, содержащий не менее k ребер;

2) существует ли в графе G полный подграф, содержащий не менее k вершин;

3) можно ли вершины графа G раскрасить в k цветов;

4) можно ли в графе G удалить k ребер, чтобы остался несвязный граф?

5. Рассмотрим задачу *ВЫП*, в которой *вход*: КНФ $K(x_1, \ldots, x_n)$, *вопрос*: существует ли такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $K(\alpha) = 1$? Показать, что задача *ВЫП* полиномиально сводится к задаче L, если *вход* и *вопрос* задачи L следующие:

1) *вход*: ДНФ $D(y_1, \ldots, y_m)$, *вопрос*: существует ли такой набор $\beta \in E_2^m$, что $D(\beta) = 0$;

2) *вход*: КНФ $K(y_1, \ldots, y_m)$, *вопрос*: представляет ли КНФ K немонотонную функцию;

3) *вход*: граф $G = (V, E)$, число k, *вопрос*: существует ли в графе G полный подграф, содержащий не менее k вершин;

4) *вход*: целочисленная матрица A размера $m \times k$, целочисленный вектор b размера $m \times 1$, *вопрос*: существует ли такой вектор x размера $k \times 1$ из нулей и единиц, что $Ax \geqslant b$?

6. По *входу* K задачи *ВЫП* построить *вход* K' задачи 3-*ВЫП* в соответствиии с полиномиальным сведением задачи *ВЫП* к задаче 3-*ВЫП*, если:

1) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5)$;

2) $K = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)(\bar{x}_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)$;

3) $K = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)$;

4) $K = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_5)(\bar{x}_1 \vee x_4 \vee x_5)$.

Показать, как по набору, на котором выполнима КНФ K, построить набор, на котором выполнима КНФ K', и наоборот.

7. Полиномиальным алгоритмом проверить выполнимость 2-КНФ K, если

1) $K = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$;

2) $K = x_1(x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)\bar{x}_4$;

3) $K = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$;

4) $K = (x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_3 \vee x_4)$.

8. Обосновать, что задача L является NP-полной, если *вход* и *вопрос* задачи L следующие:

1) *вход*: ДНФ $D(x_1, \ldots, x_n)$, *вопрос*: существует ли такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $D(\alpha) = 0$;

2) *вход*: КНФ $K(x_1, \ldots, x_n)$, *вопрос*: представляет ли КНФ K нелинейную функцию;

3) *вход*: КНФ $K(x_1, \ldots, x_n)$, не содержащая отрицаний переменных, *вопрос*: существуют ли два противоположных набора, на которых КНФ K равна единице;

4) *вход*: формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ над множеством $B = \{x \cdot y, x \vee y, \bar{x}\}$, *вопрос*: существует ли такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $F(\alpha) = 1$?