

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 38

Арифметические интерпретации и теории

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Арифметика

(раздел математики, предметом которого являются числа)

занимает особо важное место в математике

В связи с этим уделим теориям, предназначенным для анализа арифметических теорем, чуть больше внимания, чем остальным

$Ar[X; \text{Const}; \text{Func}; \text{Pred}]$ — так будем обозначать

арифметическую интерпретацию сигнатуры $\langle \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred} \rangle$

над множеством чисел X :

- ▶ Предметная область: X
- ▶ $\text{Const} \subseteq X$, и оценкой числа является само число
- ▶ Func и Pred содержат символы известных арифметических операций и отношений, оценивающиеся общепринятым арифметическим способом
 - ▶ Например, $+$, $-$, \cdot , $=$, \neq , $<$, ...
 - ▶ Все отклонения в сторону “неизвестного” будут поясняться отдельно

В части курса, посвящённой аксиоматическим теориям, **арифметикой** будем называть теорию арифметической интерпретации

В частности, особое внимание будет уделено двум видам арифметик:

- ▶ **Формальная арифметика** — теория интерпретации

$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; s, +, \cdot; =]$$

- ▶ $s^{(1)}$ — функциональный символ со следующей оценкой: $\bar{s}(x) = x + 1$

- ▶ **Арифметика Пресбургера** — *полная* теория интерпретации

$$Ar[\mathbb{N}_0; 0; s, +; =]$$

Формальная арифметика кажется достаточно узкой:

“всего лишь” целые числа, сложение, умножение да равенство — а как же все остальные операции и отношения?

А арифметика Пресбургера кажется совсем тривиальной:

даже умножения нет

Далее будет показано, эти впечатления обманчивы

На примере этих двух видов арифметик будут затронуты, в частности, вопросы

- ▶ выразительности и выразимости:
 - ▶ Насколько широкий класс утверждений может быть сформулирован в выбранной сигнатуре?
 - ▶ Как соотносятся между собой такие классы утверждений для разных сигнатур?
 - ▶ Можно ли использовать в утверждениях арифметические понятия, отсутствующие в сигнатуре? (И какие, и как?)

- ▶ разрешимости:
 - ▶ Какие арифметические понятия достаточно включить в сигнатуру, чтобы автоматическое доказательство теорем стало невозможным?
 - ▶ Для более узких сигнатур — как может быть устроено такое автоматическое доказательство?