ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2008. Том 15, № 6. С. 40–49

УДК 519.716

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ*)

С. С. Марченков, В. С. Фёдорова

Аннотация. Исследуются решения функциональных булевых уравнений. Для каждого из классов $P_2, T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01}$ решается вопрос о построении систем функциональных булевых уравнений с фиксированным множеством функциональных констант и одной функциональной переменной, имеющих в качестве единственного решения заданную функцию рассматриваемого класса. Для любого непустого множества F n-местных булевых функций определяется система уравнений с функциональными константами $\vee, \&$, множеством решений которой служит F. Устанавливается, что при замкнутости множества F относительно перехода к двойственным функциям соответствующую систему уравнений можно определить без функциональных констант.

Ключевые слова: функциональное булево уравнение, замкнутый класс булевых функций.

В ряде разделов математики как отдельные функции, так и множества функций часто определяются в виде решений некоторых систем уравнений. В дискретной математике этот способ задания функций широко применяется в теории рекурсивных функций и теории автоматов. Немало подобных примеров имеется и в теории функций многозначной логики. Так, функциональное булево уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

(все переменные $x_1, \ldots, x_n$ считаются связанными кванторами общности) определяет все самодвойственные булевы функции от n переменных (и только эти функции), а уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n) \vee f(x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n) = f(x_1 \vee y_1, \ldots, x_n \vee y_n)$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00438).

— все монотонные функции от n переменных. Имея достаточное множество исходных функций (функциональных констант), этим способом можно определить и многие другие множества n-местных булевых функций: линейных, квадратичных, симметрических и т. д. Такие примеры можно найти в различных работах, касающихся, в частности, замкнутых классов булевых функций (см., например, [1–4, 6, 7, 11]).

В данной работе мы рассматриваем функциональные булевы уравнения, которые наряду с индивидными переменными содержат функциональные булевы переменные. Цель работы — исследование общих вопросов, относящихся к решениям таких систем функциональных булевых уравнений: зависимость решений от функциональных констант, возможность построения систем уравнений с заданным единственным решением или заданным множеством решений. При определении языка функциональных булевых уравнений мы придерживались терминологии работы [5]. При этом некоторые из полученных нами результатов (относящиеся, в основном, к единственным решениям систем уравнений) близки к соответствующим результатам из [5].

Отметим, что для булевых алгебр похожая задача рассматривалась несколькими авторами [8–10, 12]. Ими исследовались уравнения с единственной одноместной функциональной переменной (для функций, принимающих значения в булевой алгебре). В качестве операций допускались все операции булевой алгебры, чему в нашей постановке соответствует полная система функциональных констант. Такая задача в рамках наших определений решается весьма просто, и мы её специально не рассматриваем.

Дадим необходимые определения. Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, P_2 — множество всех функций на E_2 (множество булевых функций). Для любого $n \geqslant 1$ и любого множества $Q \subseteq P_2$ обозначим через $Q^{(n)}$ множество всех n-местных функций из Q.

Определим язык функциональных булевых уравнений. Предполагаем, что каждая функция из P_2 имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n-местных функций из P_2 используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем *функциональными булевыми константами* или, короче, *функциональными константами*. Общепринятые обозначения $0, 1, -, \vee$, & сохраняем за булевыми константами, отрицанием, дизъюнкцией и конъюнкцией.

Наряду с функциональными константами рассматриваем *функциональные булевы переменные* (коротко: *функциональные переменные*). Для обозначения n-местных функциональных переменных используем символы $\varphi_i^{(n)}$. Областью значений функциональной переменной $\varphi_i^{(n)}$ служит множество $P_2^{(n)}$. В случае, когда это не приводит к недоразумению, верхние индексы у функциональных переменных будем опускать.

Помимо функциональных переменных используем обычные *индивидные переменные* $x_1, x_2, \ldots$ с областью значений E_2. Иногда для лучшего понимания структуры формулы в качестве индивидных переменных будем использовать переменные y, z.

Пусть $Q \subseteq P_2$. Определим понятие *терма над* Q. Всякая индивидная переменная есть терм над Q. Если $t_1, \ldots, t_n$ — термы над Q, $f_i^{(n)}$ — функциональная константа, являющаяся обозначением функции из Q, $\varphi_j^{(n)}$ — функциональная переменная, то выражения

$$f_i^{(n)}(t_1, \ldots, t_n), \quad \varphi_j^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) \tag{1}$$

суть термы над Q.

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы над Q. Равенства $t_1 = t_2$ и $t_2 = t_1$ в дальнейшем не различаем. Равенства над Q называем также *функциональными булевыми уравнениями над* Q.

Пусть $t_1 = t_2$ — функциональное булево уравнение над Q и $\varphi_{i_1}^{(n_1)}, \ldots, \varphi_{i_m}^{(n_m)}$ — все функциональные переменные, входящие в это уравнение. *Решением уравнения* $t_1 = t_2$ называем систему булевых функций $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \ldots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$, которая после замены каждой функциональной переменной $\varphi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение индивидных переменных). Отметим, что решением уравнения над Q могут быть функции, не входящие в множество Q.

Пусть Ξ — конечная система уравнений над Q. *Решением системы уравнений* Ξ называем систему булевых функций, которая является решением каждого уравнения, входящего в Ξ.

Мы хотим определять некоторые множества булевых функций (от одного и того же числа переменных) с помощью решений систем уравнений. С этой целью выделим одну из функциональных переменных системы уравнений Ξ, которую назовём *главной функциональной переменной* системы Ξ. Пусть $\varphi_i^{(n)}$ — главная функциональная переменная системы уравнений Ξ, F — подмножество множества $P_2^{(n)}$. Будем говорить, что множество функций F *определяется* системой уравнений Ξ, если F является множеством всех тех n-местных функций, которые входят в решения системы Ξ как компоненты для переменной $\varphi_i^{(n)}$. Наконец, говорим, что множество функций F *определимо* системой уравнений над Q, если существует система уравнений над Q, которая определяет множество F.

Утверждение 1. *Пусть множества функций*

$$F_0 \subseteq P_2^{(m)},\ F_1 \subseteq P_2^{(n)}, \ldots, F_m \subseteq P_2^{(n)}$$

определимы системами уравнений над Q. Тогда системами уравнений над Q определимо множество всех функций вида

$$g_0(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)), \tag{2}$$

где $g_0 \in F_0, g_1 \in F_1, \ldots, g_m \in F_m$.

Доказательство. Пусть $\Xi_0, \Xi_1, \ldots, \Xi_m$ — системы уравнений над Q с главными функциональными переменными $\varphi_0^{(m)}, \varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}$, которые определяют соответственно множества $F_0, F_1, \ldots, F_m$. Будем предполагать, что системы уравнений $\Xi_0, \Xi_1, \ldots, \Xi_m$ не имеют общих функциональных переменных. Систему уравнений над Q, определяющую искомое множество функций вида (2), зададим следующим образом: объединим все уравнения систем $\Xi_0, \Xi_1, \ldots, \Xi_m$ и добавим новое уравнение

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_0(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

где φ — новая главная функциональная переменная. Утверждение 1 доказано.

Замечание. Утверждение 1 можно несколько обобщить, допуская в (2) вместо некоторых функций $g_1, \ldots, g_m$ переменные $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае, разумеется, соответствующие данным функциям системы уравнений следует исключить.

Напомним определение некоторых замкнутых классов булевых функций (см., например, [3]). Пусть T_0, T_1, S суть соответственно классы всех функций, сохраняющих 0, всех функций, сохраняющих 1, и всех самодвойственных функций. Положим

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, \quad S_{01} = S \cap T_{01}.$$

Исследуем вопрос о возможности построения функционального булева уравнения с заданным единственным решением. В теореме 1 мы рассмотрим классы $P_2, T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01}$ и для каждого из этих классов подберём систему Q функций (этого класса) таким образом, чтобы любая функция рассматриваемого класса была единственным решением подходящей системы функциональных булевых уравнений над Q, имеющих только одну функциональную переменную.

Теорема 1. *Для каждого из классов $P_2, T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01}$ пусть символ Q обозначает соответственно множество функций*

$$\{0,1\}, \quad \{0\}, \quad \{1\}, \quad \{\bar{x}\}, \quad \{\vee, \&\}, \quad \varnothing.$$

Тогда для любой функции g из рассматриваемого класса существует система функциональных булевых уравнений над Q с одной функциональной переменной, единственным решением которой служит функция g.

Доказательство. Сначала рассмотрим классы P_2, T_0, T_1, S. Нетрудно видеть, что любая функция g от n переменных любого из этих классов может быть полностью задана системой из 2^n равенств вида

$$g(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = h(x), \tag{3}$$

где для класса P_2 система функций $\{g_1, \ldots, g_n, h\}$ принадлежит множеству $\{0,1\}$, для класса T_0 — множеству $\{0, x\}$, для класса T_1 — множеству $\{1, x\}$ и для класса S — множеству $\{x, \bar{x}\}$. В самом деле, для класса P_2 функции $g_1, \ldots, g_n$ суть произвольные константы $a_1, \ldots, a_n$, а функция h — константа, равная $g(a_1, \ldots, a_n)$. Для класса T_0 одно из равенств (3) имеет вид $g(0, \ldots, 0) = 0$, все остальные равенства определяют значения функции g на двух наборах, один из которых — нулевой (поэтому равенство $g(0, \ldots, 0) = 0$, вообще говоря, можно исключить). Для класса S каждое из равенств (3) определяет значения функции g на двух противоположных наборах (здесь систему равенств можно сократить наполовину, беря из двух равенств (3) и $g(\bar{g}_1(x), \ldots, \bar{g}_n(x)) = \bar{h}(x)$ только одно).

В соответствии с обнаруженным свойством для каждого из классов P_2, T_0, T_1, S искомая система уравнений будет состоять из уравнений вида

$$\varphi(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = h(x),$$

где функции $g_1, \ldots, g_n, h$ принадлежат указанным множествам $\{0,1\}$, $\{0, x\}, \{1, x\}, \{x, \bar{x}\}$ и подчиняются соотношениям (3).

Обратимся к классам T_{01}, S_{01}. Заметим, что все функции множества $T_{01}^{(2)}$ суть $x_1, x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2$, а множества $S_{01}^{(2)}$ — x_1, x_2. Поэтому если g — произвольная функция от n переменных из класса T_{01} или S_{01}, то g полностью определяется системой из 2^n равенств вида

$$g(g_1(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, x_2)) = h(x_1, x_2), \tag{4}$$

где $g_1(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, x_2)$ суть переменные x_1, x_2 и для класса T_{01} функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит множеству $\{x_1, x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$, а для класса S_{01} — множеству $\{x_1, x_2\}$. Легко видеть, что из двух равенств вида (4), отличающихся перестановкой переменных x_1, x_2, можно оставить только одно. Поэтому искомая система уравнений над множеством Q будет состоять из 2^{n-1} уравнений вида

$$\varphi(g_1(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, x_2)) = h(x_1, x_2),$$

где $g_1(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, x_2)$ суть переменные x_1, x_2, а функция $h(x_1, x_2)$ удовлетворяет соотношению (4). Теорема 1 доказана.

Скажем несколько слов о роли классов $P_2, T_0, T_1, S, T_{01}, S_{01}$ в теореме 1. Пусть задано множество булевых функций Q и мы хотим найти множество R_Q всех тех функций g, для которых существует система функциональных булевых уравнений над Q, имеющая единственным решением функцию g. Согласно теореме 1 при любом Q имеем $S_{01} \subseteq R_Q$. В частности, это включение справедливо при $Q \subseteq S_{01}$.

Пусть $Q \nsubseteq S_{01}$. Тогда в силу известных результатов о замкнутых классах булевых функций (см., например, [3]) замыкание $[Q \cup S_{01}]$ совпадает с одним из классов P_2, T_0, T_1, S, T_{01}. Если, например, $Q \subseteq T_{01}$ (и, значит, $[Q \cup S_{01}] = T_{01}$), то суперпозициями функций множества $Q \cup S_{01}$ можно получить, в частности, функции $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \& x_2$. Поэтому согласно утверждению 1 можно построить такие системы Ξ_1 и Ξ_2 функциональных булевых уравнений над Q, которые определяют функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \& x_2$. Пользуясь далее теоремой 1 и утверждением 1, мы для любой функции g из T_{01} можем образовать такую систему Ξ функциональных булевых уравнений над Q, которая имеет единственным решением (по главной функциональной переменной) функцию g. Правда, в отличие от систем из теоремы 1 система уравнений Ξ может иметь несколько функциональных переменных. Таким образом, в этом случае мы приходим к включению $T_{01} \subseteq R_Q$ (полностью вопрос об объёме множества R_Q будет решён в теореме 2).

Сходные рассуждения можно провести и в тех случаях, когда множество $Q \cup S_{01}$ порождает один из классов P_2, T_0, T_1, S.

Пусть g — n-местная функция. *Характеристическим рядом* функции g назовём упорядоченную последовательность всех функций вида $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $i_1, \ldots, i_n \in \{1, 2\}$. Принцип упорядочения может быть, например, лексикографическим:

$$g(x_1, \ldots, x_1), g(x_1, \ldots, x_1, x_2), \ldots, g(x_2, \ldots, x_2, x_1), g(x_2, \ldots, x_2).$$

Пусть $\{g_1(x_1, x_2), \ldots, g_{2^n}(x_1, x_2)\}$ — характеристический ряд функции g, где для единообразия функции $g(x_1, \ldots, x_1)$ и $g(x_2, \ldots, x_2)$ считаем зависящими от обеих переменных x_1, x_2. Нетрудно заметить, что характеристический ряд функции полностью определяет данную функцию. Действительно, набор $(g_1(0,1), \ldots, g_{2^n}(0,1))$ есть вектор значений функции g, принимаемых ею на всех 2^n наборах из E_2^n.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 1$, $F \subseteq P_2^{(n)}$ и $F \neq \varnothing$. Тогда существует система функциональных булевых уравнений с функциональными константами $\vee, \&$ и двумя функциональными переменными, которая определяет множество F.*

Доказательство. Определим в классе T_{01} $(2^n + 4)$-местную функцию $h(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_{2^n})$. Для любой функции g из F пусть

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2, g_1(x_1, x_2), \ldots, g_{2^n}(x_1, x_2)) = y_1 \tag{5}$$

и

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_{2^n}) = y_2 \tag{6}$$

для всех остальных значений $z_1, \ldots, z_{2^n}$.

Функция h сохраняет константы 0 и 1, поскольку её значения совпадают со значениями переменных y_1, y_2. Предположим, что n-местная функция g' не входит в множество F. Тогда равенство (5) для функции g' не может выполняться при всех значениях переменных x_1, x_2. В самом деле, в противном случае согласно определению функции h, например, для значений $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ существует такая функция $g \in F$, что выполняется равенство

$$(0, 1, g'_1(0,1), \ldots, g'_{2^n}(0,1)) = (0, 1, g_1(0,1), \ldots, g_{2^n}(0,1)). \tag{7}$$

Однако, как отмечено выше, вектор $(g'_1(0,1), \ldots, g'_{2^n}(0,1))$ полностью определяет функцию g'. Следовательно, равенство (7) противоречит соотношениям $g' \notin F$, $g \in F$.

Из доказанного следует, что произвольная функция g из $P_2^{(n)}$ принадлежит множеству F тогда и только тогда, когда соотношение (5) выполняется тождественно по переменным x_1, x_2, y_1, y_2. Отсюда легко получить искомую систему функциональных булевых уравнений с двумя функциональными переменными. Именно, сначала согласно теореме 1 строим систему функциональных уравнений Ξ_1 с одной функциональной переменной φ_1 и функциональными константами $\vee, \&$, которая определяет функцию h. Затем вводим новую (главную) функциональную переменную φ_2 и в соответствии с равенством (5) добавляем к системе Ξ_1

уравнение

$$\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2, \varphi_2(x_1, \ldots, x_1), \varphi_2(x_1, \ldots, x_1, x_2), \ldots,\\ \varphi_2(x_2, \ldots, x_2, x_1), \varphi_2(x_2, \ldots, x_2)) = y_1,$$

в котором распределение переменных x_1, x_2 под знаком функциональной переменной φ_2 соответствует их распределению при получении характеристического ряда функции g в равенстве (5). Теорема 2 доказана.

Утверждение 2. *Пусть Q — множество самодвойственных булевых функций, и система функциональных булевых уравнений над Q определяет множество функций F. Тогда множество F вместе с каждой функцией содержит также двойственную ей функцию.*

Доказательство. Пусть система функций $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_m}\}$ является решением системы уравнений Ξ над Q. Если t_1, t_2 — термы над множеством функций $Q \cup \{f_{i_1}, \ldots, f_{i_m}\}$ и равенство $t_1 = t_2$ выполняется при всех значениях индивидных переменных, входящих в термы t_1, t_2, то в силу самодвойственности функций из Q и принципа двойственности для булевых функций при всех значениях индивидных переменных будет выполняться равенство $t_1^* = t_2^*$, где термы t_1^*, t_2^* получаются из термов t_1, t_2 заменой функций $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m}$ соответствующими двойственными функциями $f_{i_1}^*, \ldots, f_{i_m}^*$. Отсюда сразу следует, что системе уравнений Ξ будет удовлетворять система функций $\{f_{i_1}^*, \ldots, f_{i_m}^*\}$. Утверждение 2 доказано.

Теорема 3. *Пусть $n \geqslant 1$ и F — непустое подмножество множества $P_2^{(n)}$, которое наряду с любой функцией содержит двойственную ей функцию. Тогда существует система функциональных булевых уравнений с двумя функциональными переменными и без функциональных констант, которая определяет множество F.*

Доказательство. В отличие от теоремы 2 $(2^n + 4)$-местная функция $h(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_{2^n})$ определяется в классе S_{01}. Определяющие соотношения (5), (6) остаются в силе. При этом следует отметить, что для двойственных функций g, g^* из множества F соотношение (5) задаёт значения функции h на парах противоположных наборов. В самом деле, если для значений a_1, a_2, b_1, b_2 из E_2 в силу (5) имеем

$$h(a_1, a_2, b_1, b_2, g_1(a_1, a_2), \ldots, g_{2^n}(a_1, a_2)) = b_1,$$

то для двойственной функции g^* будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 &= h(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, g_1^*(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \ldots, g_{2^n}^*(\bar{a}_1, \bar{a}_2))\\ &= h(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{g}_1(a_1, a_2), \ldots, \bar{g}_{2^n}(a_1, a_2)).\end{aligned}$$

Таким образом, на противоположных наборах

$$(a_1, a_2, b_1, b_2, g_1(a_1, a_2), \ldots, g_{2^n}(a_1, a_2)), (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{g}_1(a_1, a_2), \ldots, \bar{g}_{2^n}(a_1, a_2))$$

функция h принимает противоположные значения $b_1, \bar{b}_1$.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 3 полностью повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 2. Теорема 3 доказана.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу возможного обобщения понятия функционального булева уравнения. Приведённое в начале статьи понятие терма над Q может показаться недостаточно широким. Например, согласно нашему определению любая индивидная переменная считается термом над Q. Тем самым в множество Q фактически вносится тождественная функция x. Поэтому можно, например, изменить понятие терма над Q, начав индуктивное определение с термов (1), где $t_1, \ldots, t_n$ — любые индивидные переменные. При таком подходе список основных результатов изменится незначительно. Дело в том, что за исключением трёх замкнутых классов C_0, C_1, C булевых функций (обозначения замкнутых классов см. в [3]) все остальные замкнутые классы содержат тождественную функцию x. Поэтому изменения могут произойти только в случае, когда множество функций Q состоит из одной или двух констант. Однако, в случае двух констант система уравнений

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1$$

определяет функцию x. Остаётся случай, когда множество Q состоит из одной константы. Этот случай достаточно прост, и мы его здесь не рассматриваем.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Балюк А. С., Винокуров С. Ф., Гайдуков А. И., Зубков О. В., Кириченко К. Д., Пантелеев В. И., Перязев Н. А., Перязева Ю. Н.** Избранные вопросы теории булевых функций. — М.: Физматлит, 2001. — 191 с.
2. **Гаврилов Г. П.** Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, вып. 1. — С. 88–99.
3. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. — 126 с.
4. **Марченков С. С.** Конечная порождаемость замкнутых классов булевых функций // Дискр. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 101–118.

5. **Марченков С. С.** Эквациональное замыкание // Дискрет. математика. — 2005. — Т. 17, вып. 2. — С. 117–126.
6. **Угольников А. Б.** О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. — 1988. — Вып. 7. — С. 79–88.
7. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. — 119 с.
8. **Ekin O., Foldes S., Hammer P. L., Hellerstein L.** Equational characterizations of Boolean function classes // Discrete Mathematics. — 2000. — V. 211. — P. 27–51.
9. **Foldes S.** Equational classes of Boolean functions via the HSP Theorem // Algebra Universalis. — 2000. — V. 44. — P. 309–324.
10. **Hellerstein L.** On generalized constraints and certificates // Rutcor Research Report 26–98. — Rutcor: Rutgers University, 1998. — **???** p.
11. **Kuntzman J.** Algébre de Boole. — Paris: Dunod, 1965. — 319 p.
12. **Pippenger N.** Galois theory for minors of finite functions // Technical Report 98–08. — **???**: Univ. British Columbia, Department of Comp. Science, 1998. — **???** p.

Марченков Сергей Серафимович,
e-mail: mathcyb@cs.msu.su

Фёдорова Валентина Сергеевна,
e-mail: mathcyb@cs.msu.su

Статья поступила
8 мая 2008 г.