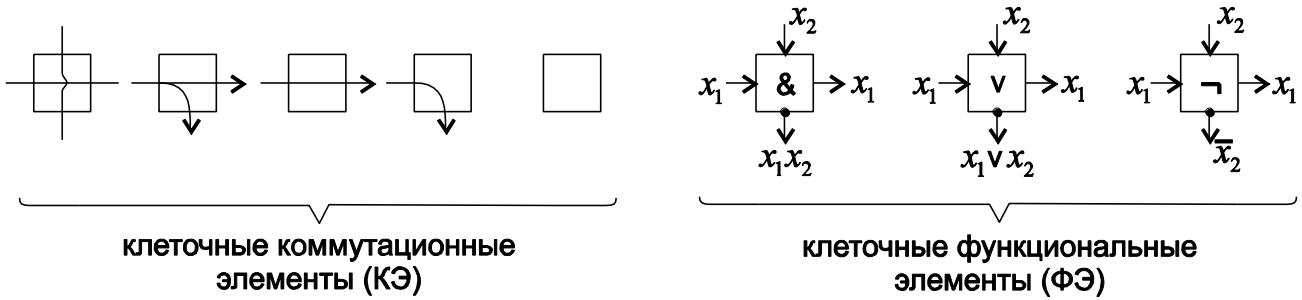
1. Клеточные схемы как «грубая» топологическая модель СБИС

- Стандартный базис $Б_0$ из функциональных и коммутационных элементов.



- Клеточные СФЭ – вложение СФЭ в плоскую прямоугольную решетку с возможными поворотами ФЭ на углы, кратные π/2, с использованием КЭ для соединения входов и выходов ФЭ, с расположением входов и выходов схемы на границе решетки.

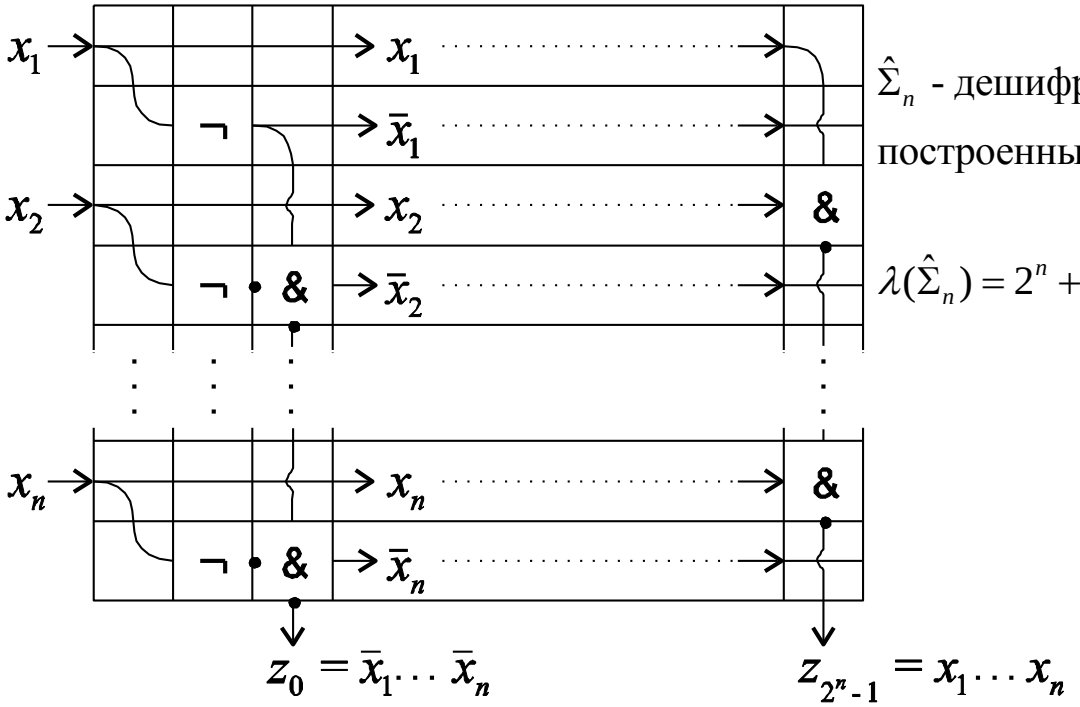
$U_{Б_0}^{КЛ}$ - класс клеточных схем в базисе $Б_0$

$\Sigma \in U_{Б_0}^{КЛ} \Rightarrow \lambda(\Sigma)$ - длина Σ, $h(\Sigma)$ - высота Σ

$A(\Sigma) = \lambda(\Sigma) \cdot h(\Sigma)$ - площадь Σ

1. Реализация дешифраторов

- Клеточная реализация дешифратора на основе совершенной ДНФ.



$\hat{\Sigma}_n$ - дешифратор (ДШ) порядка n из $U_{Б_0}^{КЛ}$, построенный по совершенной ДНФ;

$$\lambda(\hat{\Sigma}_n) = 2^n + 2, \quad h(\hat{\Sigma}_n) = 2n \;\Rightarrow\; A(\hat{\Sigma}_n) = n \cdot 2^{n+1}(1 \pm \bar{o}(1))$$

1. Порядок функции Шеннона для площади клеточных схем

$$A(F) = \min_{\substack{\Sigma \in U_{Б_0}^{КЛ} \\ \Sigma \text{ реал. } F}} A(\Sigma),\ A(n) = \max_{f(x_1,\dots,x_n)} A(f)$$

Нижняя оценка $A(n) \geq c_1 2^n \left(1 - \bar{o}(1)\right)$ получается из обычных мощностных соображений с учётом того, что число попарно неэквивалентных схем в $U_{Б_0}^{КЛ}$ от БП $x_1,\dots,x_n$, которые реализуют одну ФАЛ и имеют площадь $\leq A$, не превосходит $(18)^A (n+1)!$

Верхняя оценка $A(n) \leq c_2 2^n \left(1 + \bar{o}(1)\right)$ получается построением схемы Σ_f, которая реализует произвольную ФАЛ $f(x_1,\dots,x_n)$ на основе разложения

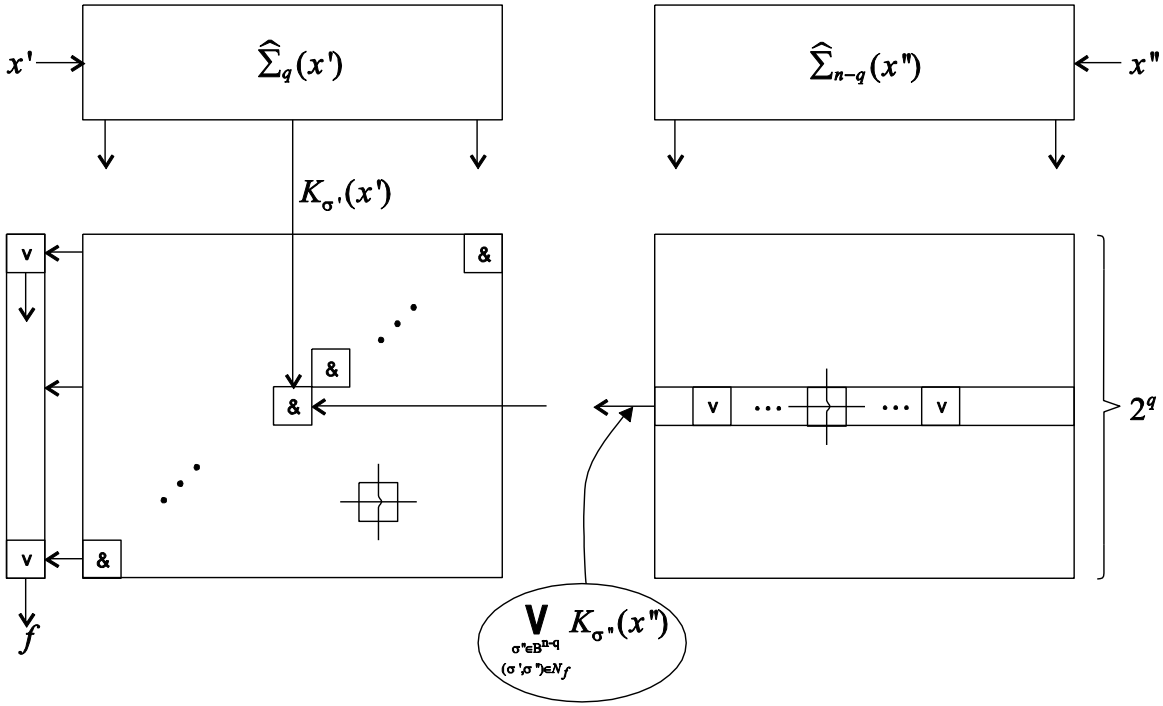
$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\sigma' \in B^q} K_{\sigma'}(x') \left(\bigvee_{\substack{\sigma'' \in B^{n-q} \\ (\sigma',\sigma'') \in N_f}} K_{\sigma''}(x'') \right),$$

где $x' = (x_1,\dots,x_q)$ и $x'' = (x_{q+1},\dots,x_n)$,

с использованием построенных выше дешифраторов $\hat{\Sigma}_q(x')$ и $\hat{\Sigma}_{n-q}(x'')$.

1. Порядок функции Шеннона для площади клеточных схем

Схема Σ_f имеет следующий вид:



При $q = \lceil 2\log n \rceil$, получаем, что $A(\Sigma_f) \le c_2 2^n \left(1+\bar{o}(1)\right)$

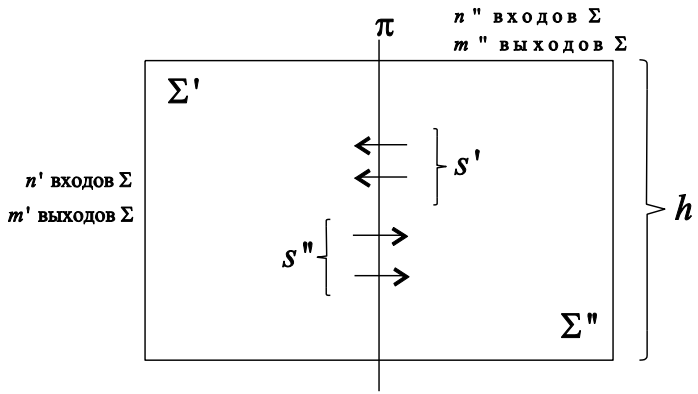
2. Асимптотика площади дешифратора

$$Q_n = \left\{ x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n} \right\} \;\Rightarrow\; A(\vec{Q}_n) \geq \frac{1}{2} n \cdot 2^n \left(1 - \bar{o}(1)\right)$$

Действительно, пусть клеточная СФЭ Σ реализует $\vec{Q}_n$ и обладает тем свойством, что $\lambda(\Sigma) = \lambda \geq h(\Sigma) = h$.

Тогда построим её вертикальный разрез π, который делит Σ на максимально близкие друг к другу по числу содержащихся в них выходов части Σ' и Σ''. Пусть при этом m' и m'' – число выходов Σ в Σ' и Σ'', n' и n'' – число входов Σ в Σ' и Σ'', а s' и s'' – число выходов Σ в Σ' и Σ'', пересекающих линию разреза π из Σ'' в Σ' и из Σ' в Σ'' соответственно.

2. Асимптотика площади дешифратора



Из свойств $\sum$ и выбора π вытекает справедливость соотношений

$$2^{n'+s'} \geq m'+1 \geq 2^{n-1}, \quad 2^{n''+s''} \geq m''+1 \geq 2^{n-1},$$

перемножая которые получим $2^n \cdot 2^{s'+s''} \geq 2^{2n-2}$ и, следовательно, $h \geq n-2$.

Таким образом, для параметров схемы $\sum$ будут выполняться неравенства

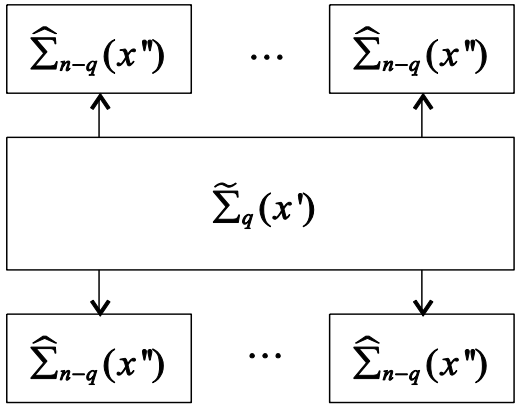
$$\lambda \geq h, \quad 2(h+\lambda) \geq n+2^n, \quad h \geq n-2,$$

из которых следует асимптотическая оценка $h\lambda \geq \frac{1}{2} n 2^n \left(1-\bar{o}(1)\right)$

2. Асимптотика площади дешифратора

Верхняя оценка $A(\vec{Q}_n) \le \frac{1}{2} n \cdot 2^n \left(1 + \bar{o}(1)\right)$

доказывается разбиением БП $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ на две группы $x' = (x_1, \ldots, x_q), x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и построением ДШ вида:



где $\tilde{\Sigma}_q(x')$ – ДШ высоты $(q+2)$ и длины 2^{n-1}, а каждый из 2^q ДШ $\hat{\Sigma}_{n-q}(x'')$ – ДШ, построенный в вопросе 7. Тогда при $n - q = \lceil 2 \log n \rceil$ площадь построенного ДШ асимптотически равна $n2^{n-1}$.

2. Антагонизм площади дешифратора и его сложности

Пусть $\breve{\Sigma}_n$ - дешифратор порядка n из $U_{Б_0}^{КЛ}$, полученный в результате вложения асимтотически оптимального по числу ФЭ дешифратора, построенного на основе дихотомии переменных. Пусть, далее, $h(\breve{\Sigma}_n)=h \le \lambda(\breve{\Sigma}_n)$, и пусть каждый выход ДШ $\breve{\Sigma}_n$ получается в результате конъюнктирования одного из узлов множества $V^{(1)}$ – множества выходов ДШ $\Sigma^{(1)}$ от БП $x_1,...,x_{n_1}$, – с одним из узлов множества $V^{(2)}$ – множества выходов ДШ $\Sigma^{(2)}$ от БП $x_{n_1+1},...,x_{n_1+n_2}$, где $n_1 = \left\lfloor n/2 \right\rfloor, n_2 = \left\lceil n/2 \right\rceil$. Проведем вертикальное сечение π ДШ $\breve{\Sigma}_n$ (см. слайд 32) так, чтобы с одной стороны от π оказалось не меньше, чем $N = \left(2^{n_1-1} - h\right)$, узлов из $V^{(1)}$, а с другой – не меньше, чем 2^{n_2-1}, узлов из $V^{(2)}$. Тогда в ДШ $\breve{\Sigma}_n$ будет существовать N "проводников", пересекающих π и соединяющих i-й из указанных выше узлов множества $V^{(1)}$ с i-м из указанных выше узлов множества $V^{(2)}$, где $i = 1,...,N$, *причем все эти проводники попарно не пересекаются*.

Таким образом, $h \ge N$ и, следовательно, (см. оценки на слайде 32),

$$A(\breve{\Sigma}_n) \ge c \cdot 2^{3n/2},$$

то есть площадь ДШ $\breve{\Sigma}_n$ существенно больше оптимальной.