Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 12

Логические исчисления

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Корректность и полнота исчисления высказываний

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Вступление

Теорема. $2+2=4$

Доказательство (?).

$$
\begin{array}{lll l}
A_{+\mathbf{0}} & \models & \mathbf{2}+\mathbf{0}=\mathbf{2} & (\varphi_1)\\
A_{=\mathbf{s}}, \varphi_1 & \models & \mathbf{s}(\mathbf{2}+\mathbf{0})=\mathbf{3} & (\varphi_2)\\
A_{+\mathbf{s}} & \models & \mathbf{2}+\mathbf{1}=\mathbf{s}(\mathbf{2}+\mathbf{0}) & (\varphi_3)\\
A_{t=}, \varphi_2, \varphi_3 & \models & \mathbf{2}+\mathbf{1}=\mathbf{3} & (\varphi_4)\\
A_{=\mathbf{s}}, \varphi_4 & \models & \mathbf{s}(\mathbf{2}+\mathbf{1})=\mathbf{4} & (\varphi_5)\\
A_{+\mathbf{s}} & \models & \mathbf{2}+\mathbf{2}=\mathbf{s}(\mathbf{2}+\mathbf{1}) & (\varphi_6)\\
A_{t=}, \varphi_5, \varphi_6 & \models & \mathbf{2}+\mathbf{2}=\mathbf{4} & (\varphi_7)
\end{array}
$$

Следовательно, $\{A_{+\mathbf{0}}, A_{=\mathbf{s}}, A_{+\mathbf{s}}, A_{t=}\} \models \varphi_7$, а значит, $\Gamma \models \varphi$ ▼

Вступление

Теорема. $2 + 2 = 4$

Доказательство (?). Это очевидно верно ▼

Доказательство (?). $2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$ ▼

Доказательство (?). Предположим, что это не так: $2 + 2 \neq 4$
Тогда $2 + 1 \neq 3$, а значит, $2 + 0 \neq 2$
Это противоречит тому, что при прибавлении ноля никакое число не изменяется ▼

Доказательство (?). Это прямое следствие из следующего очевидного факта: $2 + 2 \neq x$ для любого числа x, отличного от 4 ▼

Доказательство (?). Это прямое следствие из следующего очевидного факта: $2 + 2 \neq 5$ ▼

Вступление

Теорема. $2 + 2 = 4$

Какие из предложенных доказательств **действительно** доказывают, что $2 + 2 = 4$?

Между надписями “**Доказательство**” и “**что и требовалось доказать**” можно записать любой текст, при этом некоторые тексты оказываются хорошими (действительно доказывают теорему), а некоторые — плохими (ничего не доказывают, даже если выглядят разумно)

Чтобы уметь говорить про **каждое** доказательство, хорошее оно или плохое, необходимо иметь **строгое** (математическое) определение доказательства

Как устроены доказательства

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

1. каждое высказывание — это "осмысленный" набор букв, допускающий ровно одну из двух оценок: **высказывание верно**, либо **высказывание неверно** — например:
   - $2 \times 2 = 4$
     - эта *формула логики предикатов* либо выполняется, либо не выполняется в каждой конкретной интерпретации
   - рассматриваемая последовательность чисел s монотонна
     - каждая конкретная последовательность чисел либо является монотонной, либо не является
   - $P \neq NP$
     - классы сложности P и NP либо совпадают, либо не совпадают, *независимо от нашей способности это проверить*

Как устроены доказательства

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

2. в любом месте доказательства можно высказать то, что считается верным без доказательства, — например:
   - аксиомы
     - "любое отношение эквивалентности транзитивно"
   - в частности, определения
     - "единица — это число, следующее за нолём"
   - доказанные ранее теоремы
     - "площадь любого прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов"
   - текущие предположения
     - "(предположим, что) *эта* формула необщезначима"

Как устроены доказательства

Если отбросить всё “лишнее”, то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

3. высказывания следуют друг за другом согласно особым **логическим законам**, которые разрешено использовать в доказательствах — например:
   - если A верно и из A следует B, то B тоже верно (правило отделения, оно же modus ponens)
   - если A верно для **любого** предмета, то A верно и для **этого** предмета (переход к частному)
   - A либо верно, либо неверно, и третьего не дано (закон исключённого третьего)
   - если из верности A следует, что B и верно, и неверно, то A неверно (приведение к абсурду)
   - если верно A или B и при этом C следует как из A, так и из B, то C верно (правило разбора случаев)

Как устроены доказательства

Если отбросить всё "лишнее", то математическое доказательство теоремы — это последовательность *высказываний*, организованная особенным образом:

4. если доказывается утверждение P, то последнее высказывание доказательства имеет вид "Следовательно, P"
   - это высказывание обычно отождествляют со фразой "что и требовалось доказать"

Чтобы научиться отличать доказательства от не-доказательств, потребуется **строго** ответить на несколько вопросов:

- Какие высказывания и законы используются в доказательстве?
- Как с помощью законов можно получать одни высказывания из других?
- Какие высказывания верны без доказательства?
- Что такое "верное высказывание" и почему все высказывания доказательства действительно верны?

Логические исчисления

Набор понятий, позволяющий строго определить понятие доказательства, обычно называется логическим исчислением

Логическое исчисление включает в себя

- алфавит: множество символов, используемых для записи высказываний
- синтаксис формул: набор правил, позволяющих про каждую последовательность символов однозначно сказать, является ли она формулой (*то есть высказыванием*)
- множество аксиом: формул, считающихся верными без доказательства
- множество правил вывода: законов, задающих способ получения новых формул из имеющихся

Логические исчисления

В логических исчислениях встречаются формулы самых разнообразных и причудливых видов, и в частности, всё то, что называлось “формулой” в лекциях, может выступать в роли формулы исчисления

Если формулами исчисления являются формулы *логики высказываний*, то такое исчисление называется

исчислением высказываний

Если формулами исчисления являются формулы *логики предикатов*, то такое исчисление называется

исчислением предикатов

Логические исчисления

Синтаксис схемы формулы над заданным набором параметров отличается от синтаксиса формулы тем, что на местах подформул разрешено произвольно записывать параметры

Пример: $A \to (B \to A)$ — схема формулы над параметрами A, B в исчислениях высказываний и предикатов

Схему Φ над параметрами $\widetilde{p}^k$ будем обозначать так: $\Phi\,[\![\widetilde{p}^k]\!]$

Записью $\Phi\,[\![p_1/\varphi_1, \dots, p_k/\varphi_k]\!]$, где $\Phi\,[\![\widetilde{p}^k]\!]$ — схема и $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — формулы, будем обозначать формулу, получаемую из Φ заменой каждого вхождения каждого параметра p_i на соответствующую формулу φ_i

Пример:
$(A \to (B \to A))\,[\![A/\mathrm{x}, B/\mathrm{x} \vee \mathrm{y}]\!]$ — это формула $\mathrm{x} \to ((\mathrm{x} \vee \mathrm{y}) \to \mathrm{x})$

Логические исчисления

Формула φ порождается схемой $\Phi\left[\!\left[\widetilde{p}^k\right]\!\right]$, если существуют формулы $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, такие что φ совпадает с $\Phi\left[\!\left[p_1/\varphi_1, \ldots, p_k/\varphi_k\right]\!\right]$

Пример: схемой $A \to (B \to A)$ над параметрами A, B

- в исчислении высказываний порождаются формулы $x \to (y \mathbin{\&} z \to x)$ и $x \to (x \to x)$ и **не** порождаются формулы $x \mathbin{\&} y$ и $y \to (y \to x)$
- в исчислении предикатов порождается формула
$$\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to (\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{Q}(\mathtt{x})) \to \mathrm{P}(\mathtt{x}))$$

Логические исчисления

Правило вывода местности n — это $(n+1)$-местное отношение на множестве формул

Формула φ выводится из формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ по n-местному правилу вывода R, если набор $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi)$ входит в отношение R

Наиболее популярный способ записи n-местного правила вывода выглядит так:

$$\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_n}{\Phi}, \qquad (*)$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi$ — схемы формул
(над общим множеством параметров $\widetilde{p}^k$)

Формулы $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi)$ входят в отношение, заданное в виде $(*)$, если, если существуют формулы $\psi_1, \ldots, \psi_k$, такие что

1. каждая формула φ_i, $1 \leq i \leq n$, совпадает с $\Phi_i \llbracket p_1/\psi_1, \ldots, p_k/\psi_k \rrbracket$
2. формула φ совпадает $\Phi \llbracket p_1/\psi_1, \ldots, p_k/\psi_k \rrbracket$

Логические исчисления

Пример: правило отделения, или modus ponens, — это двуместное правило вывода над параметрами A, B следующего вида:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

По правилу отделения

- в исчислении высказываний из формул
  $$\mathrm{x} \vee \mathrm{y}, \qquad \mathrm{x} \vee \mathrm{y} \to \mathrm{z} \mathbin{\&} \mathrm{u}$$
  выводится формула
  $$\mathrm{z} \mathbin{\&} \mathrm{u}$$
- в исчислении предикатов из формул
  $$\mathrm{P}(\mathrm{x}), \qquad \mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{y}\ \mathrm{Q}(\mathrm{y})$$
  выводится формула
  $$\forall \mathrm{y}\ \mathrm{Q}(\mathrm{y})$$

Логические исчисления

Вывод формулы φ_k из множества формул Γ в исчислении $\mathfrak{C}$ — это конечная последовательность формул

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_k,$$

такая что для каждой формулы φ_i, $1 \leq i \leq k$, верно хотя бы одно из трёх условий:

1. φ_i — аксиома исчисления $\mathfrak{C}$
2. $\varphi_i \in \Gamma$
3. Существуют формулы $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n}$ вывода и правило вывода R исчисления $\mathfrak{C}$, такие что
   - $j_1 < i, \ldots, j_n < i$ и
   - формула φ выводится из $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_n}$ по правилу R

Логические исчисления

Формула φ выводима из множества формул Γ в исчислении $\mathfrak{C}$,
если существует вывод этой формулы из Γ в $\mathfrak{C}$
Обозначение: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$

Замечание. соотношение $\Gamma \cup \{\psi_1, \dots, \psi_k\} \vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$ также принято записывать в следующем виде: $\Gamma, \psi_1, \dots, \psi_k \vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$

Вывод формулы φ из пустого множества формул в исчислении $\mathfrak{C}$ также называется **доказательством** формулы φ в $\mathfrak{C}$

Формула φ выводима (доказуема) в исчислении $\mathfrak{C}$,
если существует доказательство этой формулы в $\mathfrak{C}$
Обозначение: $\vdash_{\mathfrak{C}} \varphi$

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Остановимся подробнее на *исчислении высказываний*:

- полагаем заданным
  счётно-бесконечное множество переменных Var
- "формулами" будем называть формулы логики высказываний над Var (*то есть булевы формулы*)

Попробуем описать исчисление высказываний $\mathfrak{H}_p$, в котором:

- содержится как можно меньше правил вывода
- содержится как можно меньше аксиом
  как можно более простого вида
- **доказуемыми** формулами являются все
  общезначимые формулы и только они

Исчисления такого вида обычно называются

исчислениями гильбертовского типа

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$
$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$
$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$
$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$
$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$
$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_1$:

верное высказывание следует из чего угодно

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{A}_1 & A \to (B \to A) \\
\mathfrak{A}_2 & (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\
\mathfrak{A}_3 & A \,\&\, B \to A \\
\mathfrak{A}_4 & A \,\&\, B \to B \\
\mathfrak{A}_5 & A \to (B \to A \,\&\, B) \\
\mathfrak{A}_6 & A \to A \vee B \\
\mathfrak{A}_7 & B \to A \vee B \\
\mathfrak{A}_8 & (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)) \\
\mathfrak{A}_9 & \neg A \to (A \to B) \\
\mathfrak{A}_{10} & (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \\
\mathfrak{A}_{11} & A \vee \neg A
\end{array}
$$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_2$:

если в предположении о верности A и B верно C
и, кроме того, из A следует B, то из A следует C

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$
$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$
$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$
$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$
$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$
$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схем $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$:

если “A и B” верно, то верно и A, и B

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$
$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$
$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$
$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$
$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$
$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_5$:

если верно и A, и B, то верно “A и B”

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$

$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$

$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$

$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$

$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$

$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схем $\mathfrak{A}_6$, $\mathfrak{A}_7$:

если к верному высказыванию через “или” добавить что угодно, то высказывание остаётся верным

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$
$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$
$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$
$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$
$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$
$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$
$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_8$:

если и из A, и из B следует C и верно “A или B”, то C верно

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$

$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$

$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$

$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$

$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$

$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_9$:

если A неверно, то из предположения о верности A следует что угодно

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$

$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$

$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$

$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$

$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$

$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_{10}$:

если из A следует, что что-то и верно, и неверно, то A неверно

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Аксиомами исчисления $\mathfrak{H}_p$ объявим все формулы, порождаемые следующими схемами над параметрами A, B, C:

$\mathfrak{A}_1$ $A \to (B \to A)$

$\mathfrak{A}_2$ $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\mathfrak{A}_3$ $A \,\&\, B \to A$

$\mathfrak{A}_4$ $A \,\&\, B \to B$

$\mathfrak{A}_5$ $A \to (B \to A \,\&\, B)$

$\mathfrak{A}_6$ $A \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_7$ $B \to A \vee B$

$\mathfrak{A}_8$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\mathfrak{A}_9$ $\neg A \to (A \to B)$

$\mathfrak{A}_{10}$ $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

$\mathfrak{A}_{11}$ $A \vee \neg A$

Содержательное прочтение схемы $\mathfrak{A}_{11}$:

любое высказывание верно или неверно, и третьего не дано

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Включим в исчисление $\mathfrak{H}_p$ **единственное** правило вывода — *правило отделения*:

$$\frac{A,\ A \to B}{B}$$

$mp(\varphi, \varphi \to \psi)$ — формула ψ, выводимая из формул φ и $\varphi \to \psi$ по правилу отделения

Теорема(*о корректности исчисления высказываний*)
Любая формула, выводимая в $\mathfrak{H}_p$, общезначима

Доказательство. Достаточно заметить, что:

- все аксиомы исчисления $\mathfrak{H}_p$ общезначимы
- если формулы φ и $\varphi \to \psi$ общезначимы, то формула ψ общезначима: для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \models \varphi \to \psi$, а значит, и $\mathcal{I} \models \psi$ ▼

А много ли (общезначимых) формул можно вывести в $\mathfrak{H}_p$?

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Для краткости до конца лекции

- вместо $\vdash_{\mathfrak{H}_p}$ будем писать $\vdash$
- будем опускать начало всех лемм:
  “для любых формул φ, $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, ψ
  и любых множеств формул Γ, Δ справедливо следующее”

Лемма(*о тривиальном выводе*). $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$

Доказательство. Последовательность, состоящая из одной формулы φ, является выводом φ из $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ▼

Лемма(*монотонность выводимости*)
Если $\Gamma \vdash \varphi$, то $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$

Доказательство. Достаточно заметить,
что любой вывод формулы φ из Γ является и выводом φ из $\Gamma \cup \Delta$ ▼

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Лемма(*о выводе тождества*). $\vdash \varphi \to \varphi$

Доказательство.

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_1: & \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) & (\chi_1) \\
\mathfrak{A}_1: & \varphi \to (\varphi \to \varphi) & (\chi_2) \\
\mathfrak{A}_2: & (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to & \\
 & \quad ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)) & (\chi_3) \\
mp(\chi_3, \chi_1): & (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi) & (\chi_4) \\
mp(\chi_4, \chi_3): & \varphi \to \varphi & \blacktriangledown
\end{array}
$$

Лемма(*правило сечения*)

Если $\Gamma \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma \vdash \varphi_k$ **и** $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \vdash \psi$**, то** $\Gamma \vdash \psi$

Доказательство.

Пусть D_i — вывод формулы φ_i из Γ и
D — вывод формулы ψ из $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$

Тогда $D_1, \ldots, D_k, D$ — вывод формулы ψ из Γ $\blacktriangledown$

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Лемма(*о дедукции*). $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \vdash \psi$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$: Пусть $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

По *монотонности выводимости*, $\Gamma, \varphi \vdash \varphi \to \psi$

По *лемме о тривиальном выводе*, $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$

По *правилу отделения*, $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

По *правилу сечения*, $\Gamma, \varphi \vdash \psi$

$(\Leftarrow)$: Пусть $\Gamma, \varphi \vdash \psi$

Тогда существует вывод $\chi_1, \ldots, \chi_k$ формулы ψ из $\Gamma \cup \{\varphi\}$

Покажем (индукцией по номеру i формулы χ_i),
что для каждой формулы χ_i верно $\Gamma \vdash \varphi \to \chi_i$

Случай 1: χ_i — аксиома или $\chi_i \in \Gamma$:

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_1: & \chi_i \to (\varphi \to \chi_i) & (\chi'_1) \\ & \chi_i & (\chi'_2) \\ mp(\chi'_2, \chi'_1): & \varphi \to \chi_i & \end{array}$$

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Лемма(*о дедукции*). $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \vdash \psi$

Доказательство. ($\Leftarrow$): $\Gamma \vdash \varphi \to \chi_i$?

Случай 2: $\chi_i = \varphi$: следует из *леммы о выводе тождества*

Случай 3: $\chi_i = mp(\chi_j, \chi_k)$, где $j < i$ и $k < i$

По *предположению индукции*, $\Gamma \vdash \varphi \to \chi_j$ и $\Gamma \vdash \varphi \to \chi_k$

При этом $\chi_k = \chi_j \to \chi_i$

Тогда $\varphi \to \chi_j, \varphi \to \chi_k \vdash \varphi \to \chi_i$:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_2 : & (\varphi \to (\chi_j \to \chi_i)) \to ((\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \chi_i)) & (\chi'_1) \\
\varphi \to \chi_k : & \varphi \to (\chi_j \to \chi_i) & (\chi'_2) \\
mp(\chi'_2, \chi'_1) : & (\varphi \to \chi_j) \to (\varphi \to \chi_i) & (\chi'_3) \\
 & \varphi \to \chi_j & (\chi'_4) \\
mp(\chi'_4, \chi'_3) : & \varphi \to \chi_i &
\end{array}
$$

По *правилу сечения*, $\Gamma \vdash \varphi \to \chi_i$ ▼

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Множество формул Γ несовместно, если существует формула ψ, такая что $\Gamma \vdash \psi$ и $\Gamma \vdash \neg\psi$

Лемма(*правило рассуждения от противного*)
Если множество $\Gamma \cup \{\varphi\}$ несовместно, то $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Доказательство.

Пусть $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ и $\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi$

По *лемме о дедукции*, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ и $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\psi$

При этом $\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi \vdash \neg\varphi$:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_{10}: & (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi) & (\chi_1) \\
 & \varphi \to \psi & (\chi_2) \\
mp(\chi_2, \chi_1): & (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi & (\chi_3) \\
 & \varphi \to \neg\psi & (\chi_4) \\
mp(\chi_4, \chi_3): & \neg\varphi &
\end{array}
$$

По *правилу сечения*, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ▼

Лемма(*правило контрапозиции*). $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

Доказательство.

По *лемме о дедукции*, достаточно показать, что $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$

По *правилу рассуждения от противного* и *лемме о тривиальном выводе*, достаточно показать, что $\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \vdash \psi$

По *монотонности выводимости*, достаточно показать, что $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$

Последнее соотношение верно по *правилу отделения* ▼

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Лемма(*о выводе связок*)

$$\begin{array}{ccc}
\varphi,\psi\vdash\varphi\,\&\,\psi & \neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg(\varphi\vee\psi) & \varphi,\neg\psi\vdash\neg(\varphi\to\psi)\\
\neg\varphi\vdash\neg(\varphi\,\&\,\psi) & \varphi\vdash\varphi\vee\psi & \psi\vdash\varphi\to\psi\\
\neg\psi\vdash\neg(\varphi\,\&\,\psi) & \psi\vdash\varphi\vee\psi & \neg\varphi\vdash\varphi\to\psi\\
\varphi\vdash\neg\neg\varphi & &
\end{array}$$

Доказательство.

$\varphi,\psi\vdash\varphi\,\&\,\psi$:

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_5: & \varphi\to(\psi\to\varphi\,\&\,\psi) & (\chi_1)\\
 & \varphi & (\chi_2)\\
mp(\chi_2,\chi_1): & \psi\to\varphi\,\&\,\psi & (\chi_3)\\
 & \psi & (\chi_4)\\
mp(\chi_4,\chi_3): & \varphi\,\&\,\psi &
\end{array}$$

$\varphi\vdash\varphi\vee\psi$:

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_6: & \varphi\to(\varphi\vee\psi) & (\chi_1)\\
 & \varphi & (\chi_2)\\
mp(\chi_2,\chi_1): & \varphi\vee\psi &
\end{array}$$

$\psi\vdash\varphi\vee\psi$: рассуждения аналогичны

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Доказательство (леммы о выводе связок).

$\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \,\&\, \psi)$:

По *правилу отделения*, $\neg\varphi, \neg\varphi \to \neg(\varphi \,\&\, \psi) \vdash \neg(\varphi \,\&\, \psi)$

По *лемме о тривиальном выводе*, $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$

По *правилу контрапозиции*, $(\varphi \,\&\, \psi) \to \varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \,\&\, \psi)$

$(\varphi \,\&\, \psi) \to \varphi$ — аксиома, и по *правилу сечения*, $\vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \,\&\, \psi)$

По *монотонности выводимости*, $\neg\varphi \vdash \neg\varphi \to \neg(\varphi \,\&\, \psi)$

По *правилу сечения*, $\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \,\&\, \psi)$

$\neg\psi \vdash \neg(\varphi \,\&\, \psi)$: рассуждения аналогичны

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Доказательство (леммы о выводе связок).

$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$:

По *правилу рассуждения от противного*, достаточно показать, что $\neg\varphi, \neg\psi, \varphi \vee \psi \vdash X$ для **любой** формулы X:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_9: & \neg\varphi \to (\varphi \to X) & (\chi_1) \\
 & \neg\varphi & (\chi_2) \\
mp(\chi_2, \chi_1): & \varphi \to X & (\chi_3) \\
\mathfrak{A}_9: & \neg\psi \to (\psi \to X) & (\chi_4) \\
 & \neg\psi & (\chi_5) \\
mp(\chi_5, \chi_4): & \psi \to X & (\chi_6) \\
\mathfrak{A}_8: & (\varphi \to X) \to ((\psi \to X) \to (\varphi \vee \psi \to X)) & (\chi_7) \\
mp(\chi_3, \chi_7): & (\psi \to X) \to (\varphi \vee \psi \to X) & (\chi_8) \\
mp(\chi_6, \chi_8): & \varphi \vee \psi \to X & (\chi_9) \\
 & \varphi \vee \psi & (\chi_{10}) \\
mp(\chi_{10}, \chi_9): & X &
\end{array}
$$

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Доказательство (леммы о выводе связок).

$\psi \vdash \varphi \to \psi$:

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_1: & \psi \to (\varphi \to \psi) & (\chi_1) \\ & \psi & (\chi_2) \\ mp(\chi_2, \chi_1): & \varphi \to \psi & \end{array}$$

$\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$:

$$\begin{array}{rll} \mathfrak{A}_9: & \neg\varphi \to (\varphi \to \psi) & (\chi_1) \\ & \neg\varphi & (\chi_2) \\ mp(\chi_2, \chi_1): & \varphi \to \psi & \end{array}$$

$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$:

По *правилу отделения*, $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

По *монотонности выводимости*, $\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

По *лемме о тривиальном выводе*, $\varphi, \neg\psi, \varphi \to \psi \vdash \neg\psi$

По *правилу рассуждения от противного*, $\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$

$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$:

По *лемме о тривиальном выводе*, $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$ и $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$

По *правилу рассуждения от противного*, $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Лемма(*правило полного перебора*)

Если $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ **и** $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$, **то** $\Gamma \vdash \psi$

Доказательство.

По *лемме о дедукции*, $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ и $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi$

При этом $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$:

$$\begin{array}{rll}
\mathfrak{A}_8: & (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \psi)) & (\chi_1) \\
& \varphi \to \psi & (\chi_2) \\
mp(\chi_2, \chi_1): & (\neg\varphi \to \psi) \to (\varphi \vee \neg\varphi \to \psi) & (\chi_3) \\
& \neg\varphi \to \psi & (\chi_4) \\
mp(\chi_4, \chi_3): & \varphi \vee \neg\varphi \to \psi, & (\chi_5) \\
\mathfrak{A}_{11}: & \varphi \vee \neg\varphi & (\chi_6) \\
mp(\chi_6, \chi_5): & \psi &
\end{array}$$

Значит, по *правилу сечения*, $\Gamma \vdash \psi$ ▼

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Записью ψ^1 обозначим формулу ψ, а записью ψ^0 — формулу $\neg\psi$

Лемма(*основная*). Для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^n)$ и любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно $\mathtt{x_1}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_1})}, \dots, \mathtt{x_n}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_n})} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$

Доказательство (индукцией по построению формулы).

База индукции. По *лемме о тривиальном выводе*,

$$\mathtt{x_1}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_1})}, \dots, \mathtt{x_n}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_n})} \vdash \mathtt{x_i}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_i})}$$

Индуктивный шаг.

Подробно разберём только один случай (остальные аналогичны): если утверждение верно для ψ и χ, то верно и для $\psi \,\&\, \chi$

По *лемме о выводе связок* и *монотонности выводимости*,

$$\psi^{\mathcal{I}(\psi)}, \chi^{\mathcal{I}(\chi)} \vdash (\psi \,\&\, \chi)^{\mathcal{I}(\psi \,\&\, \chi)}$$

По *предположению индукции*,

$$\mathtt{x_1}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_1})}, \dots, \mathtt{x_n}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_n})} \vdash \psi^{\mathcal{I}(\psi)} \text{ и } \mathtt{x_1}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_1})}, \dots, \mathtt{x_n}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_n})} \vdash \chi^{\mathcal{I}(\chi)}$$

По *правилу сечения*, $\mathtt{x_1}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_1})}, \dots, \mathtt{x_n}^{\mathcal{I}(\mathtt{x_n})} \vdash \varphi^{\mathcal{I}(\varphi)}$ ▼

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Теорема(*о полноте исчисления высказываний*)
Любая общезначимая формула выводима в $\mathfrak{H}_p$

Доказательство.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

По *основной лемме*, для любого набора $\widetilde{\alpha}^n \in \{0,1\}^n$ верно

$$\mathtt{x_1}^{\alpha_1}, \dots, \mathtt{x_n}^{\alpha_n} \vdash \varphi$$

По *правилу полного перебора*,
если для любого набора $\widetilde{\alpha}^i \in \{0,1\}^i$ верно $\mathtt{x_1}^{\alpha_1}, \dots, \mathtt{x_i}^{\alpha_i} \vdash \varphi$,
то для любого набора $\widetilde{\alpha}^{i-1} \in \{0,1\}^{i-1}$ верно $\mathtt{x_1}^{\alpha_1} \dots, \mathtt{x_{i-1}}^{\alpha_{i-1}} \vdash \varphi$

Применив правило полного перебора $\mathtt{n}$ раз, получим
справедливость соотношения $\vdash \varphi$ ▼