

«Избранные вопросы дискретной математики» (318 группа)

Зимняя сессия 2019-2020 учебного года

Лектор: профессор С.Н. Селезнева

В билете два вопроса (один из части А и один из части Б) и задача.

Часть А – ответ без подготовки по любым бумажным материалам (конспектам, книгам, распечаткам лекций и т.д.); проверяется понимание доказательств; определения и теоремы формулируются без конспектов. Электронными средствами (компьютерами, телефонами и т.д.) на экзамене пользоваться не разрешается.

1. Теорема о полноте системы Поста и следствия из нее. Функция Вебба.
2. Теорема Кузнецова о функциональной полноте в P_k . Предполные классы.
3. Существенные функции. Три леммы о существенных функциях.
4. Критерий полноты Яблонского. Критерий Слупецкого.
5. Предполный класс. Теорема о предикатном описании предполного класса в P_k , не содержащего все функции одной переменной.
6. Предполный класс Слупецкого. Теорема о предикатном описании предполного класса в P_k , содержащего все функции одной переменной.
7. Симметрическая группа перестановок S_n . Теорема Кэли. Цикловой индекс группы перестановок.
8. Действие группы перестановок на множестве. Теорема об индексе стабилизатора элемента.
9. Действие группы перестановок на множестве. Лемма Бернсайда.
10. Раскраски. Эквивалентность раскрасок по группе. Теорема Пойа (частный случай).
11. Перечисляющие ряды для цветов и для раскрасок. Теорема Пойа (общий случай, только формулировка). Примеры.
12. Наибольший общий делитель двух многочленов над полем. Теорема о его существовании и единственности.
13. Теорема о мультиплкативной группе конечного поля. Примитивный элемент конечного поля.
14. Теорема о произведении неприводимых нормированных многочленов над простым полем.
15. Формула обращения Мебиуса. Теорема о числе неприводимых многочленов степени n над простым полем. Существование поля из p^n элементов, где p – простое число, $n \geq 1$.
16. Расширения полей. Теорема о корнях неприводимых многочленов в расширении простого поля.
17. Расширения полей. Теорема о свойствах корней неприводимых многочленов в расширении простого поля.
18. Теорема о существовании и единственности конечного поля из p^n элементов, где p – простое число, $n \geq 1$.

Часть Б – ответ без конспектов и без подготовки.

19. Теоремы о представлении k -значных функций в 1-й и 2-й формах.
20. Теорема о представлении k -значных функций полиномами по модулю k .
21. Полные системы. Алгоритм распознавания полноты в P_k .
22. Замкнутые классы. Классы функций, сохраняющих множество, их замкнутость и критерий совпадения с P_k .
23. Замкнутые классы. Классы функций, сохраняющих разбиение, их замкнутость и критерий совпадения с P_k .
24. Замкнутые классы. Классы функций, сохраняющих предикат, их замкнутость.
25. Полные системы, шефферовы функции. Критерий шефферовости k -значной функции.
26. Базис замкнутого класса. Теорема Янова о существовании в P_k при $k \geq 3$ замкнутого класса без базиса.
27. Базис замкнутого класса. Теорема Мучника о существовании в P_k при $k \geq 3$ замкнутого класса со счетным базисом. Мощность множества замкнутых классов в P_k при $k \geq 3$.
28. Группы, их простейшие свойства. Правило сокращения в группе. Конечные коммутативные группы, их свойства.
29. Подгруппы, критерий подгруппы. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
30. Действие группы перестановок на множестве. Орбита и стабилизатор элемента.
31. Кольца, их виды. Поля. Теорема о конечном целостном кольце. Простое поле.
32. Характеристика кольца. Характеристика конечного целостного кольца.
33. Кольцо многочленов над кольцом. Наследование свойств кольца в кольце многочленов.
34. Кольцо многочленов над полем. Деление с остатком многочленов над полем.

35. Приводимые и неприводимые многочлены над полем. Корни многочленов. Критерий неприводимости над полем для многочленов степени два и три.
36. Теорема о поле по модулю многочлена над полем. Построение поля из p^n элементов, где p – простое число, $n \geq 1$.
37. Наибольший общий делитель двух многочленов над полем. Алгоритм Евклида его нахождения. Нахождение обратного элемента в поле.

Литература

1. Слайды к лекциям
2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.
3. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007.
4. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988.