Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 41

Арифметика Пресбургера

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр

Арифметика Пресбургера

$Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \cdot, \mathsf{s}; =]$ — эта интерпретация оказалась непростой:

- её теория обязательно или неполна, или неперечислима
- не существует алгоритма, проверяющего справедливость арифметических теорем в этой сигнатуре

Попробуем посмотреть,
насколько упростится интерпретация, если *слегка* сузить сигнатуру

Напоминание: арифметика Пресбургера (АП) — это
полная теория интерпретации $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathsf{s}; =]$

В определении формальной арифметики,
в отличие от арифметики Пресбургера, не было требования **полноты** —
это намёк на то, что существуют "полезные" полные теории
арифметической интерпретации без умножения

Теорема. **Арифметика Пресбургера разрешима**

Разрешимость АП (доказательство)

Ar — так будем обозначать в доказательстве интерпретацию $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathbf{s}; =]$

Рассмотрим АП $\mathcal{T}$

Так как теория $\mathcal{T}$ полна и $Ar \models \mathcal{T}$, для любой формулы $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ верно

$$\models_{\mathcal{T}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Ar \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad Ar \models \forall \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\, \varphi$$

Значит, чтобы показать разрешимость $\mathcal{T}$, достаточно предоставить алгоритм проверки **истинности предложения** φ в Ar

Разрешимость АП (доказательство)

Заметим (вспомнив и *теорему о подстановке определения*), что в Ar выразимы следующие понятия:

- Заданное число α, $\alpha \in \mathbb{N}_0$:
$$y = \underbrace{\mathsf{s}(\mathsf{s}(\dots \mathsf{s}}_{\alpha \text{ раз}}(0)\dots))$$
- Операция $\beta \cdot \_$ умножения на заданное число β, $\beta \in \mathbb{N}_0$:
$$y = \underbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}_{\beta \text{ раз}}$$
- Отношение $\_ > \_$:
$$\exists z\, (x_1 = x_2 + z \,\&\, \neg(z = 0))$$
- Отношение $\_ \equiv_\gamma \_$ равенства чисел по заданному модулю γ, $\gamma \in \mathbb{N}$:
$$\exists z\, (x_1 + \gamma \cdot z = x_2 \vee x_2 + \gamma \cdot z = x_1)$$
- Отношения $\geq$, $<$, $\leq$, $\neq$, $\not\equiv_\gamma$:
$$x_1 > x_2 \vee x_1 = x_2 \qquad x_2 > x_1 \qquad x_2 \geq x_1 \qquad \neg(x_1 = x_2) \qquad \neg(x_1 \equiv_\gamma x_2)$$

По *теореме о подстановке определения*, достаточно предоставить алгоритм проверки иситинности произвольного предложения φ в интерпретации $\overline{Ar}$, полученной из Ar добавлением этих понятий

Разрешимость АП (доказательство)

Простой случай: φ — предложение, не содержащее кванторов

Значит, в φ не содержится ни одной переменной,
и все атомы являются основными

Тогда можно легко проверить выполнимость атомов в $\overline{Ar}$ —
то есть проверить справедливость арифметических отношений
$>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $=$, $\neq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ для выражений,
построенных над целыми числами и операциями $+$, **s** и $\beta\cdot$

После этого по выполнимости всех атомов можно легко определить
(вспомнив *семантику &, $\vee$, $\neg$ и $\to$*), выполняется ли φ в $\overline{Ar}$

Общий случай: φ — произвольное предложение

Покажем, как можно *свести* общий случай к простому:
преобразовать φ в предложение ψ без кванторов так, чтобы было верно

$$\overline{Ar} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Ar} \models \psi$$

Разрешимость АП (доказательство)

Лемма(*основная*). **Для любой формулы вида $\exists \mathtt{x}\, \psi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, где ψ — формула без кванторов, существует формула $\chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ без кванторов, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение**

Доказательство.

Используя *законы булевой алгебры*, заме́ним ψ на равносильную *дизъюнктивную нормальную форму* (*ДНФ*)

$$\psi \sim \exists \mathtt{x}\, (L_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L_p \vee L'_1 \,\&\, \ldots \,\&\, L'_q \vee \ldots)$$

Вынесем за квантор слагаемые ДНФ, не содержащие $\mathtt{x}$:

$$\exists \mathtt{x}\, (\chi_1(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \vee \chi_2(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})) \sim \exists \mathtt{x}\, (\chi_2(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \vee \chi_1(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})) \sim \chi_1(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \vee \exists \mathtt{x}\, \chi_2(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Распространим квантор по слагаемым, оставшимся в ДНФ:

$$\exists \mathtt{x}\, (K_1 \vee \cdots \vee K_m) \sim \exists \mathtt{x}\, K_1 \vee \cdots \vee \exists \mathtt{x}\, K_m$$

Осталось показать, как преобразовать каждую формулу $\exists \mathtt{x}\, K_i(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ в бескванторную формулу $\psi_i(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, реализующую то же отношение в $\overline{Ar}$

Доказательство основной леммы

$$\exists \mathtt{x}\ K_i(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \mapsto \psi_i(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

K_i — это слагаемое ДНФ, то есть конъюнкция атомов и их отрицаний

Замéним каждое отрицание атома в K_i
на атом с противоположным отношением:

$$\neg(t_1 < t_2) \text{ — на } t_1 \geq t_2,$$
$$\neg(t_1 = t_2) \text{ — на } t_1 \neq t_2, \ \ldots$$

В результате получится конъюнкция атомов K_i',
реализующая то же отношение, что и K_i

Арифметический смысл такой конъюнкции атомов — это
система линейных (не)равенств Σ над переменными $\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$

Осталось показать, как можно спроектировать Σ по переменной $\mathtt{x}$:
преобразовать её в совокупность Δ систем над $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ так,
чтобы набор $(a_1, \ldots, a_n)$ был решением Δ тогда и только тогда,
когда существует число a, такое что $(a, a_1, \ldots, a_n)$ — решение системы Σ

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Элементы Σ имеют вид

$$\begin{array}{cccc} t_1 = t_2 & t_2 < t_2 & t_1 \leq t_2 & t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ t_1 \neq t_2 & t_1 > t_2 & t_1 \geq t_2 & t_1 \not\equiv_\gamma t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел $\mathbb{N}_0$ и операций s, $+$, и $\beta\cdot$

С использованием несложных известных *арифметических равносильностей* можно привести эти элементы к виду:

$$\begin{array}{cccc} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \leq t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \alpha\mathtt{x} + t_1 \neq t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \geq t_2 & \alpha\mathtt{x} + t_1 \not\equiv_\gamma t_2, \end{array}$$

где t_1 и t_2 — выражения того же вида, не содержащие $\mathtt{x}$

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})$$

Перейдя от системы к совокупности систем,
можно устранить атомы четырёх видов:

$$A \not\equiv_\gamma B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \equiv_\gamma B + 1 \\ A \equiv_\gamma B + 2 \\ \dots \\ A \equiv_\gamma B + (\gamma - 1) \end{array}\right. \qquad A \geq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A > B \end{array}\right.$$

$$A \neq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < B \end{array}\right. \qquad A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = B \\ A < B \end{array}\right.$$

Осталось показать, как можно спроектировать по $\mathtt{x}$
систему уравнений и неравенств вида

$$\alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 < t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 > t_2 \qquad \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2,$$

где t_1 и t_2 — выражения, состоящие из чисел $\mathbb{N}_0$ и операций s, $+$, и $\beta\cdot$

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Если система содержит хотя бы одно равенство $=$,
то исключить $\mathtt{x}$ можно так:

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases} \Leftrightarrow_{(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})} \begin{cases} t_1 \equiv_\alpha t_2 \\ t_2 \geq t_1 \\ S(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \gtrless \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \alpha t_3 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\mathtt{x} + t_1 = t_2 \\ \alpha t_3 + \beta t_2 \equiv_{\alpha\gamma} \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{cases}$$

Пусть теперь система не содержит равенств $=$

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Во всех строгих неравенствах системы
можно получить одинаковые левые части:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 \gtrless_1 t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \gtrless_2 t_4 \\ \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_1 \beta t_2 + \alpha t_3 \\ \alpha\beta\mathtt{x} + \beta t_1 + \alpha t_3 \gtrless_2 \alpha t_4 + \beta t_1 \\ \dots \end{array}\right.$$

Если система содержит много строгих неравенств (*в одну сторону*)
с одинаковыми левыми частями, то можно исключить $\mathtt{x}$
из всех неравенств, кроме одного:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_1 \\ t_1 \mathrel{\substack{\geq \\ \leq}} t_2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t \gtrless t_2 \\ t_2 \gtrless t_1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \dots \end{array}\right.$$

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Равенства по модулю разных чисел можно привести
к равенствам по модулю одного числа:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\mathtt{x} + t_1 \equiv_\gamma t_2 \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\delta t_4 \\ \ldots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\delta\mathtt{x} + \delta t_1 \equiv_{\gamma\delta} \delta t_2 \\ \beta\gamma\mathtt{x} + \gamma t_3 \equiv_{\gamma\delta} \gamma t_4 \\ \ldots \end{array}\right.$$

Осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из системы, содержащей

- не более одного неравенства $\alpha\mathtt{x} + t > t_1$,
- не более одного неравенства $\alpha\mathtt{x} + t < t_2$ с той же левой частью и
- произвольное число равенств $\beta_i\mathtt{x} + t_3^i \equiv_\gamma t_4^i$
  по одинаковому модулю γ

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Как исключить $\mathtt{x}$ из неравенства $>$:

$$\begin{cases} \alpha \mathtt{x} + t > t_1 \\ \alpha \mathtt{x} + t < t_2 \\ \beta \mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{cases}$$

Если $t > t_1$, то неравенство выполнено

Для **каждого** решения системы, такого что $t \leq t_1$,
найдётся решение, отличающееся только значением $\mathtt{x}$:

$$\alpha \mathtt{x} + t \in \{t_1 + 1, \dots, t_1 + \alpha\gamma\}$$

Значит, неравенство $\alpha \mathtt{x} + t > t_1$ можно заменить на совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t > t_1 \\ \alpha \mathtt{x} + t = t_1 + 1 \\ \alpha \mathtt{x} + t = t_1 + 2 \\ \dots \\ \alpha \mathtt{x} + t = t_1 + \alpha\gamma \end{array} \right.$$

Доказательство основной леммы

$$\Sigma(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \overset{\exists \mathtt{x}}{\mapsto} \Delta(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

Осталось показать, как исключить $\mathtt{x}$ из $<$ и $\equiv_\gamma$, когда он исключён из $>$:

$$\left\{\begin{array}{l} [\alpha\mathtt{x} + t < t_2] \\ \beta\mathtt{x} + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} [t < t_2] \\ t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} [\alpha + t < t_2] \\ \beta + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{array}\right. \\ \dots \\ \left\{\begin{array}{l} [\alpha(\gamma - 1) + t < t_2] \\ \beta(\gamma - 1) + t_3 \equiv_\gamma t_4 \\ \dots \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Разрешимость АП (доказательство)

Лемма. Для любой формулы вида $\forall \mathtt{x}\ \psi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$, где ψ — формула без кванторов, существует формула $\chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ без кванторов, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение

Доказательство.

Согласно *основным равносильностям*, $\forall \mathtt{x}\ \psi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) \sim \neg\exists \mathtt{x}\ \neg\psi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

По *предыдущей лемме*, существует формула $\psi'(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ без кванторов, реализующая в $\overline{Ar}$ то же отношение, что и $\exists \mathtt{x}\ \neg\psi(\mathtt{x}, \widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

Тогда требуемая формула $\chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ может быть устроена так: $\chi = \neg\psi'$
▼ (леммы)

Для преобразования произвольного предложения в бескванторное, требуемого в доказательстве разрешимости АП, достаточно пошагово применять две только что доказанных леммы, устраняя кванторы по одному от внутренних к внешним ▼

Выразительность АП

Отношение R выразимо в $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathsf{s}; =]$ тогда и только тогда, когда оно является множеством решений какой-либо совокупности систем линейных (не)равенств $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\equiv_\alpha$, $\not\equiv_\alpha$ над $\mathbb{N}_0$

Доказательство.

Рассмотрим формулу $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$, реализующую отношение R

Следуя методу устранения кванторов из доказательства теоремы о разрешимости, можно преобразовать $\varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ в формулу $\psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$ без кванторов, реализующую отношение R

Применяя *законы булевой алгебры*, можно преобразовать полученную формулу ψ в ДНФ χ

Арифметическая трактовка χ — это и есть указанная совокупность систем линейных (не)равенств: отношение, реализуемое χ, совпадает с множеством решений соответствующей совокупности систем

При этом если φ — произвольная ДНФ без кванторов, то $\chi = \varphi$ ▼

Аксиомы АП

Один из известных наборов аксиом арифметики Пресбургера устроен так ($\mathcal{T}$):

- $\forall \mathtt{x}\ (\mathtt{x} + 0 = \mathtt{x})$
- $\forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ (\mathtt{x} + \mathsf{s}(\mathtt{y}) = \mathsf{s}(\mathtt{x} + \mathtt{y}))$
- $\forall \mathtt{x}\ (\mathtt{x} = \mathtt{x})$
- $\forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ ((\mathtt{x} = \mathtt{y}) \to (\mathtt{y} = \mathtt{x}))$
- $\forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ \forall \mathtt{z}\ ((\mathtt{x} = \mathtt{y})\,\&(\mathtt{y} = \mathtt{z}) \to (\mathtt{x} = \mathtt{z}))$
- $\forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ ((\mathtt{x} = \mathtt{y}) \to (\mathsf{s}(\mathtt{x}) = \mathsf{s}(\mathtt{y})))$
- $\forall \mathtt{x}\ \forall \mathtt{y}\ ((\mathsf{s}(\mathtt{x}) = \mathsf{s}(\mathtt{y})) \to (\mathtt{x} = \mathtt{y}))$
- $\forall \mathtt{x}\ \neg(0 = \mathsf{s}(\mathtt{x}))$
- $\varphi\{\mathtt{x}/0\}\,\&\,\forall \mathtt{x}\ (\varphi \to \varphi\{\mathtt{x}/\mathsf{s}(\mathtt{x})\}) \to \forall \mathtt{x}\ \varphi$,
  где φ — произвольная формула с одной свободной переменной $\mathtt{x}$

Можно легко убедиться, что $Ar[\mathbb{N}_0; 0; +, \mathsf{s}; =] \models \mathcal{T}$

А доказать, что эта теория полна, можете попробовать самостоятельно