Математическая логика

mk.cs.msu.ru $\to$ Лекционные курсы $\to$ Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

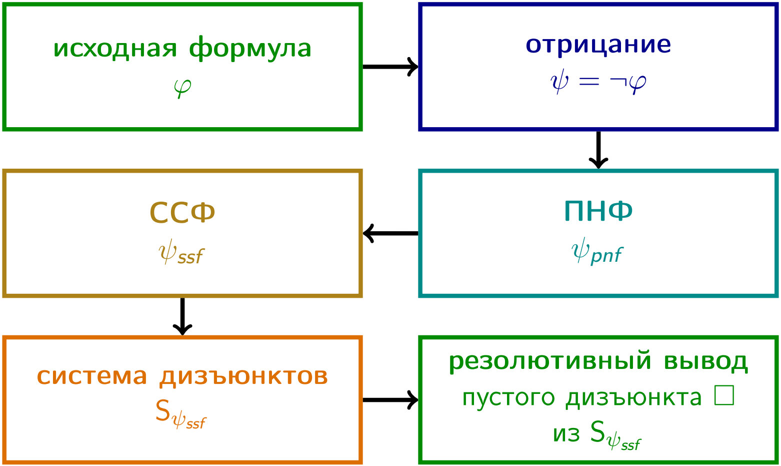
Блок 22

Обоснование общезначимости формулы методом резолюций (пример)

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2020/2021, весенний семестр



$$\models \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi_{pnf} \quad\Leftrightarrow\quad \not\models \psi_{ssf} \quad\Leftrightarrow\quad \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

$\Rightarrow$ существует вывод $\square$ из $S_{\psi_{ssf}}$

Примеры, которые использовались при обсуждении этапов метода резолюций, выбирались так, чтобы при их совмещении получился *сквозной пример*: обоснование общезначимости формулы

$$\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

методом семантических таблиц

Запишем получившееся обоснование от начала и до конца

Этап 1: поставить отрицание

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\,P(x) \to \exists y\,R(x,y)) \to \exists y\,R(x,y))$$

$$\models \exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

Этап 2: построить равносильную ПНФ

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$

$$\sim (\textit{переименование переменных})$$

$$\neg\exists x\ (P(x)\,\&(\forall z\ P(z) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists u\ R(x,u))$$

$$\sim (\textit{удаление импликаций})$$

$$\neg\exists x\ (\neg(P(x)\,\&(\neg\forall z\ P(z) \vee \exists y\ R(x,y))) \vee \exists u\ R(x,u))$$

$$\sim (\textit{продвижение отрицаний})$$

$$\forall x\ (P(x)\,\&(\exists z\ \neg P(z) \vee \exists y\ R(x,y))\,\&\,\forall u\ \neg R(x,u))$$

$$\sim (\textit{вынесение кванторов})$$

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\sim (\textit{получение КНФ})$$

$$\forall x\ \exists z\ \exists y\ \forall u\ (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\models \exists x\,(P(x)\,\&(\forall x\, P(x) \to \exists y\, R(x,y)) \to \exists y\, R(x,y))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\, \exists z\, \exists y\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(z) \vee R(x,y))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 3: построить ССФ согласно алгоритму сколемизации

$$\not\models \forall x\, \underline{\exists z}\, \underline{\exists y}\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\underline{z}) \vee R(x,\underline{y}))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

Этап 4: перейти к системе дизъюнктов

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x)\,\&(\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)))\,\&\,\neg R(x,u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x,\mathbf{g}(x)), \neg R(x,u)\}$$

$$\models \exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\not\models \{P(x), \quad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \quad \neg R(x, u)\}$$

Этап 5: резолютивно вывести $\square$

$$P(x_1) \qquad \neg P(\mathbf{f}(x_2)) \vee R(x_2, \mathbf{g}(x_2)) \qquad R(x_3, \mathbf{g}(x_3)) \qquad \neg R(x_4, u_4) \longrightarrow \square$$

Оказалось, что $\square$ резолютивно выводим
из построенной системы дизъюнктов

Следовательно (по *спектру доказанных ранее теорем*), исходная формула
$$\exists x\ (P(x)\,\&(\forall x\ P(x) \to \exists y\ R(x,y)) \to \exists y\ R(x,y))$$
общезначима