

# 1 Формулы логики предикатов

**Упражнение 1.1.** Для приведенных ниже предложений сформируйте, выделив константы и элементарные отношения, алфавит логического языка. Представьте каждое из утверждений в виде адекватно соответствующей ему формулы логики предикатов.

1. Каждый любит сам себя. Значит, кто-то кого-то любит.
2. Если задача имеет решение, то математик может ее решить. Я - математик, но не могу решить этой задачи. Значит, задача неразрешима.
3. Вы можете обманывать всех иногда, вы можете обманывать кого-то всегда, но вы не можете обманывать всех всегда.

Обратить внимание на многозначность (полисемантичесность) некоторых выражений, допускающую их двоякое истолкование.

**Упражнение 1.2.** Используя приведенные ниже предикаты:

- $C(x)$  — « $x$  — квадрат»;
- $S(x)$  — « $x$  — шар»;
- $B(x)$  — « $x$  — черный предмет»;
- $W(x)$  — « $x$  — белый предмет»;
- $U(x, y)$  — «предмет  $x$  лежит ниже предмета  $y$ ».

напишите формулы логики предикатов для следующих утверждений:

1. «Хотя бы один предмет, лежащий ниже всех черных квадратов, является шаром»;
2. «Нет такого белого квадрата, который лежит под каким-то черным шаром»;
3. «Каков бы ни был черный предмет, либо он является шаром, лежащим выше всех белых квадратов, либо он является квадратом, лежащим ниже какого-нибудь шара»;
4. «Никакой черный квадрат и никакой белый шар не лежат друг над другом»;
5. «Если все шары черные, то белых квадратов нет»;
6. «Всякая фигура, не являющаяся белым квадратом, лежащим хотя бы под одним шаром, имеет черный цвет и лежит над всеми белыми фигурами».

**Упражнение 1.3.** Введем следующие предикаты геометрии:

- $P(x)$  —  $x$  — точка на плоскости;
- $L(x)$  —  $x$  — прямая на плоскости;
- $B(x, y)$  — предмет  $x$  лежит на предмете  $y$ ;
- $E(x, y)$  — предмет  $x$  совпадает с предметом  $y$ .

Записать формулы, выражающие следующие утверждения геометрии:

1. Через любые две различные точки плоскости проходит единственная прямая.
2. Определение параллельных прямых.
3. Через любую точку вне прямой проходит единственная прямая параллельная заданной.

Построить геометрические интерпретации, в которых записанные формулы могут быть выполненными и невыполнимыми.

**Упражнение 1.4.** Пусть  $\Sigma = \langle X, S^{(3)}, P^{(3)} \rangle$  — алфавит арифметики,  $I = \langle N, \bar{S}^{(3)}, \bar{P}^{(3)} \rangle$  — интерпретация, где  $N$  — множество натуральных чисел  $0, 1, 2, \dots$  (область интерпретации),  $\bar{S}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x + y = z$ ,  $\bar{P}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x \times y = z$ . Записать формулу с одной свободной переменной  $x$ , истинную в интерпретации  $I$  тогда и только тогда, когда

1.  $x = 0$ ;
2.  $x = 1$ ;
3.  $x = 2$ ;
4.  $x$  — заданное натуральное число  $n$ ;
5.  $x$  — четное число;
6.  $x$  — простое число.

Записать формулу с двумя свободными переменными  $x, y$ , истинную в интерпретации  $I$  тогда и только тогда, когда

1.  $x = y$ ;
2.  $x < y$ ;
3.  $x$  кратно  $y$ .

## 2 Вывод семантических таблиц

Закрытая таблица (аксиома):  $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle, \quad \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

### ПРАВИЛА ВЫВОДА

$\mathbf{L}\neg \quad \frac{\langle \neg A, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A, \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\neg \quad \frac{\langle \Gamma \mid \neg A, \Delta \rangle}{\langle A, \Gamma \mid \Delta \rangle}$
$\mathbf{L}\& \quad \frac{\langle A \& B, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A, B, \Gamma \mid \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\& \quad \frac{\langle \Gamma \mid A \& B, \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A, \Delta \rangle; \langle \Gamma \mid B, \Delta \rangle}$
$\mathbf{L}\vee \quad \frac{\langle A \vee B, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A, \Gamma \mid \Delta \rangle; \langle B, \Gamma \mid \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\vee \quad \frac{\langle \Gamma \mid A \vee B, \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A, B, \Delta \rangle}$
$\mathbf{L}\rightarrow \quad \frac{\langle A \rightarrow B, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle B, \Gamma \mid \Delta \rangle; \langle \Gamma \mid A, \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma \mid A \rightarrow B, \Delta \rangle}{\langle A, \Gamma \mid B, \Delta \rangle}$
$\mathbf{L}\forall \quad \frac{\langle \forall x A, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/t\}, \forall x A, \Gamma \mid \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\forall \quad \frac{\langle \Gamma \mid \forall x A, \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/c\}, \Delta \rangle}$

где переменная  $x$  свободна  
в формуле  $A$  для терма  $t$

где константа  $c$  не содержится  
в формуле  $A$ , а также в  
формулах множеств  $\Gamma$  и  $\Delta$

$\mathbf{L}\exists \quad \frac{\langle \exists x A, \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/c\}, \Gamma \mid \Delta \rangle}$	$\mathbf{R}\exists \quad \frac{\langle \Gamma \mid \exists x A, \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/t\}, \exists x A, \Delta \rangle}$
--	---

где константа  $c$  не содержится  
в формуле  $A$ , а также в  
формулах множеств  $\Gamma$  и  $\Delta$

где переменная  $x$  свободна  
в формуле  $A$  для терма  $t$

Здесь  $A, B$  — формулы логики предикатов,  
 $\Gamma, \Delta$  — множества формул логики предикатов,  
 $x$  — предметная переменная,  
 $c$  — константа,  
 $t$  — терм.

**Упражнение 2.1.** Установить, являются ли приведенные ниже формулы

1. выполнимыми,
2. общезначимыми (тождественно истинными),
3. невыполнимыми:

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \ \& \ \exists x \neg P(x); \\ & \exists x P(x) \ \vee \ \exists x \neg P(x); \\ & \exists x \forall y (P(x) \ \& \ \neg P(y)); \\ & P(x) \ \rightarrow \ \forall x P(x); \\ & \forall x P(x) \ \rightarrow \ P(x); \\ & \forall y \exists x R(x, y) \ \rightarrow \ \exists x \forall y R(x, y); \\ & (\forall x P(x) \ \rightarrow \ \forall x Q(x)) \ \rightarrow \ \forall x (P(x) \ \rightarrow \ Q(x)). \end{aligned}$$

**Упражнение 2.2.** Применяя табличный вывод, обосновать общезначимость следующих формул:

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \ \rightarrow \ \neg \forall x \neg P(x); \\ & \exists x \forall y R(x, y) \ \rightarrow \ \forall y \exists x R(x, y); \\ & \forall x (P(x) \ \rightarrow \ \exists y R(x, f(y))) \ \rightarrow \ (\exists x \neg P(x) \ \vee \ \forall x \exists z R(x, z)); \\ & \forall x \exists y \forall z (P(x, y) \ \rightarrow \ P(y, z)); \\ & \exists x \forall y \exists z (P(x, y) \ \rightarrow \ P(y, z)); \\ & \forall x (P(x) \ \& \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x P(x) \ \& \ \forall x R(x)); \\ & (\forall x P(x) \ \& \ \forall x R(x)) \ \rightarrow \ \forall x (P(x) \ \& \ R(x)); \\ & \exists x (P(x) \ \vee \ R(x)) \ \rightarrow \ (\exists x P(x) \ \vee \ \exists x R(x)); \\ & (\exists x P(x) \ \vee \ \exists x R(x)) \ \rightarrow \ \exists x (P(x) \ \vee \ R(x)); \\ & (\forall x P(x) \ \vee \ R(y)) \ \rightarrow \ \forall x (P(x) \ \vee \ R(y)); \\ & \forall x (P(x) \ \vee \ R(y)) \ \rightarrow \ (\forall x P(x) \ \vee \ R(y)); \\ & \exists y \forall x Q(x, y) \ \rightarrow \ \forall x \exists y Q(x, y). \end{aligned}$$

**Упражнение 2.3.** Будет ли успешно завершён табличный вывод для следующих формул:

$$\begin{aligned} & \forall x (P(x) \ \vee \ Q(x)) \ \rightarrow \ (\forall x P(x) \ \vee \ \forall x Q(x)); \\ & \exists x (P(x) \ \vee \ Q(x)) \ \rightarrow \ (\exists x P(x) \ \vee \ \exists x Q(x))? \end{aligned}$$

**Упражнение 2.4.** Существует ли необщезначимая формула, истинная на всякой интерпретации, область которой содержит не менее трех элементов?

**Упражнение 2.5.** Записать формулу, истинную на любой интерпретации, предметная область которой содержит не более пяти элементов.

### 3 Нормальные формы и унификация

**Упражнение 3.1.** Используя правила равносильных преобразований формул, привести следующие формулы к предваренной нормальной форме.

$$\begin{aligned} & \exists x \forall y P(x, y) \ \& \ \forall x \exists y P(y, x); \\ & \forall x ((\exists y P(y, x) \rightarrow \exists y P(x, y)) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x Q(x); \\ & \neg \forall y (\exists x P(x, y) \rightarrow \forall u (R(y, u) \rightarrow \neg \forall z (P(z, u) \vee \neg R(z, y)))); \\ & \exists x \exists y (P(x, y) \rightarrow R(x)) \rightarrow \forall x (\neg \exists y P(x, y) \vee R(x)); \\ & \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow (\neg P(y, x) \rightarrow (P(x, x) \equiv P(y, y)))); \\ & \exists x (\forall x P(x, x) \vee \exists x \neg R(x)) \rightarrow \exists x (R(x) \rightarrow \exists y P(f(x), y)). \end{aligned}$$

**Упражнение 3.2.** Используя правило сколемизации, постройте сколемовские стандартные формы для следующих формул.

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y \forall z \exists u R(x, y, z, u); \\ & \neg \forall x (\exists y R(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x)); \\ & \neg \forall y (\exists x P(x, y) \rightarrow \forall u (R(y, u) \rightarrow \neg \forall z (P(z, u) \vee \neg R(z, y)))); \\ & \exists x \exists y (P(x, y) \rightarrow R(x)) \rightarrow \forall x (\neg \exists y P(x, y) \vee R(x)); \\ & \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow (\neg P(y, x) \rightarrow (P(x, x) \equiv P(y, y)))); \\ & \exists x (\forall x P(x, x) \vee \exists x \neg R(x)) \rightarrow \exists x (R(x) \rightarrow \exists y P(f(x), y)). \end{aligned}$$

**Упражнение 3.3.** Вычислите композицию подстановок  $\theta_1 \theta_2$ , где

1.  $\theta_1 = \{x/f(x), y/g(x, z), u/v, v/f(c)\}$ ,  $\theta_2 = \{x/f(y), y/c, z/g(y, v), v/u\}$ ;
2.  $\theta_1 = \{x/y\}$ ,  $\theta_2 = \{y/z\} \{z/x\} \{x/y\}$ .

**Упражнение 3.4.** Найти наиболее общий унификатор следующих пар атомарных формул (заглавными буквами обозначены переменные, а прописными — константы и функциональные символы):

$$\begin{array}{ll} P(c, X, f(X)), & P(c, Y, Y); \\ P(f(X, Y), Z, h(Z, Y)), & P(f(Y, X), g(Y), V); \\ R(Z, f(X, b, Z)), & R(h(X), f(g(a), Y, Z)); \\ P(X, f(Y), h(Z, X)), & P(f(Y), X, h(f(Y), f(Z))); \\ P(X_1, X_2, X_3, X_4), & P(f(c, c), f(X_1, X_1), f(X_2, X_2), f(X_3, X_3)). \end{array}$$

## 4 Метод резолюций

**Упражнение 4.1.** Найти резольвенту следующих дизъюнктов.

$$\neg P(f(x, y), z, h(z, y)) \vee R(z, v), \quad Q(x) \vee P(f(y, x), g(y), v);$$

$$P(x, y, h(y, x)) \vee R(y, f(x)), \quad \neg P(x, f(x), h(x, y)) \vee \neg P(y, g(x), h(y, y));$$

**Упражнение 4.2.** Построив резолютивный вывод, доказать противоречивость следующих множеств дизъюнктов.

1.  $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$

$$D_1 = P(X, f(X)),$$

$$D_2 = R(Y, Z) \vee \neg P(Y, f(a)),$$

$$D_3 = \neg R(c, X),$$

$$D_4 = R(X, Y) \vee R(Z, f(Z)) \vee \neg P(Z, Y),$$

$$D_5 = P(X, X).$$

2.  $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$

$$D_1 = E(x) \vee V(y) \vee C(f(x)),$$

$$D_2 = E(x) \vee S(x, f(x)),$$

$$D_3 = \neg E(a),$$

$$D_4 = P(a),$$

$$D_5 = P(f(x)) \vee \neg S(y, x),$$

$$D_6 = \neg P(x) \vee \neg V(g(x)) \vee \neg V(y),$$

$$D_7 = \neg P(x) \vee \neg C(y);$$

3.  $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$

$$D_1 = P(y, f(x)),$$

$$D_2 = \neg Q(y) \vee \neg Q(z) \vee \neg P(y, f(z)) \vee Q(v),$$

$$D_3 = Q(b),$$

$$D_4 = \neg Q(a);$$

**Упражнение 4.3.** Используя метод резолюций, обосновать общезначимость следующих формул.

$$\exists x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg P(x);$$

$$\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y);$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, f(y))) \rightarrow (\exists x \neg P(x) \vee \forall x \exists z R(x, z));$$

$$\forall x \exists y \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z));$$

$$\exists x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow P(y, z));$$

$$\exists x \forall y (\forall z (P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \rightarrow (P(x, x) \rightarrow P(y, x))).$$

**Упражнение 4.4.** Используя формализм логики предикатов и метод резолюций, записать утверждение о существовании ориентированного маршрута в графе  $\mathcal{G} = \langle \{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (b, a), (c, d)\} \rangle$  из вершины  $a$  в вершину  $d$  и проверить его справедливость. Разрешается использовать константы  $a, b, c, d$  для обозначения вершин орграфа и предикаты  $R^{(2)}, Q^{(2)}$  для обозначения отношений соединения дугой и достижимости соответственно.

## 5 Хорновские логические программы. Декларативная и операционная семантики.

**Упражнение 5.1.** Следующие основные свойства и отношения

- $\text{мужчина}(X)$ ,
- $\text{женщина}(Y)$ ,
- $\text{мать}(X, Y)$ ,
- $\text{отец}(X, Y)$ ,
- $\text{супруги}(X, Y)$

описываются фактами хорновской логической программы, например,

```
мужчина(adam)←;  
женщина(eve)←;  
отец(adam,abel)←;  
мать(eve,cain)←;
```

Продолжите эту логическую программу, создав подходящие программные утверждения, описывающие следующие родственные свойства и отношения:

1.  $\text{родитель}(X, Y)$ ;
2.  $\text{дед}(X, Y)$ ;
3.  $\text{быть\_отцом}(X)$ ;
4.  $\text{брат}(X, Y)$ ;
5.  $\text{потомок}(X, Y)$ ;

**Упражнение 5.2.** Создайте логические программы, описывающие следующие свойства термов:

$\text{list}(X)$  — " $Y$  является списком".

$\text{elem}(X, Y)$  — " $X$  является элементом списка  $Y$ ",

Выяснить, каково множество правильных ответов на следующие запросы, обращенные к построенным программам:

1. ?  $\text{list}(a.b.c.nil)$
2. ?  $\text{list}(a.X.nil)$
3. ?  $\text{list}(a.b)$
4. ?  $\text{elem}(X,a.b.c.nil)$

5. ?  $\text{elem}(a, X)$

**Упражнение 5.3.** Постройте SLD-резолутивные вычисления для каждого из запросов, приведенных в упражнении 5.2, обращенных к программам, описывающим предикаты *list* и *elem*.

**Упражнение 5.4.** Постройте всевозможные SLD-резолутивные вычисления для запроса  $G = ? R(Y), P(Z)$ , обращенного к программе  $\mathcal{P}$ , выделяя в каждом целевом утверждении самую левую подцель. Каково множество вычисленных ответов на запрос  $G$  к программе  $\mathcal{P}$ ?

$\mathcal{P}: R(Y) \leftarrow P(Y), Q(Y);$

$P(a) \leftarrow ;$

$P(b) \leftarrow ;$

$Q(a) \leftarrow ;$

$Q(f(X)) \leftarrow Q(X);$

**Упражнение 5.5.** Построить логические программы, описывающие следующие свойства и отношения на множестве списков.

1.  $\text{head}(L, X)$  : Заголовком списка  $L$  является элемент  $X$ ;
2.  $\text{tail}(L, X)$  : Хвостом списка  $L$  является список  $X$ ;
3.  $\text{prefix}(L, X)$  : Префиксом (начальным подсписком) списка  $L$  является список  $X$ ;
4.  $\text{sublist}(L, X)$  : Список  $X$  является подсписком списка  $L$ ;
5.  $\text{less}(X, Y)$  : Длина списка  $X$  меньше длины списка  $Y$ ;
6.  $\text{subset}(X, Y)$  : Список  $X$  состоит только из элементов, содержащихся в списке  $Y$ ;
7.  $\text{concat}(X, Y, Z)$  : Список  $X$  является конкатенацией (последовательным соединением) списков  $Y$  и  $Z$ ;
8.  $\text{reverse}(X, Y)$  : Список  $X$  является обращением списка  $Y$ , т. е.  $X$  состоит из тех же элементов, что и список  $Y$ , но в списке  $X$  эти элементы следуют друг за другом в обратном порядке;
9.  $\text{period}(X, Y)$  : Список  $X$  является периодической последовательностью, полученной в результате многократного повторения списка  $Y$ ;

**Упражнение 5.6.** Натуральные числа  $X$  и  $Y$  представлены в двоичной системе счисления и их двоичные записи представлены в виде списков. Построить логические программы, описывающие следующие отношения на множестве натуральных чисел.

1.  $\text{less}(X, Y)$  : Число  $X$  меньше числа  $Y$ ;
2.  $\text{sum}(X, Y, Z)$  : Число  $Z$  равно сумме чисел  $X$  и  $Y$ ;

## 6 Встроенные функции и предикаты

**Упражнение 6.1.** Используя встроенные предикаты равенства, неравенства и сравнения чисел, написать логические программы решения следующих задач

1. Упорядочить целочисленный список  $L_1$ .  
Запрос ? *make\_ordered*( $L_1, L_2$ ).
2. Построить неповторный список  $L_2$ , состоящий из всех элементов, содержащихся в списке  $L_1$ .  
Запрос ? *single*( $L_1, L_2$ ).
3. Построить неповторный список  $L_3$ , состоящий из всех элементов, содержащихся как в списке  $L_1$ , так и в списке  $L_2$ .  
Запрос ? *common*( $L_1, L_2, L_3$ ).

**Упражнение 6.2.** Используя оператор вычисления значений, построить логические программы, решающие следующие задачи.

1. Вычислить длину  $X$  списка  $L$   
Запрос *length*( $L, X$ );
2. Вычислить сумму  $X$  элементов целочисленного списка  $L$ ;  
Запрос *sum*( $L, X$ );
3. Вычислить кратность  $Y$  вхождения элемента  $X$  в список  $L$ ;  
Запрос *mult*( $L, X, Y$ );
4. Вычислить самый распространенный элемент  $X$  в списке  $L$ ;  
Запрос *most\_of*( $L, X$ );
5. Вычислить список всех простых чисел, не превосходящих заданного числа  $X$ ;  
Запрос *prime*( $L, X$ );
6. Вычислить наибольший общий делитель  $Z$  двух целых чисел  $X$  и  $Y$ ;  
Запрос *GCD*( $X, Y, Z$ );

## 7 Операторы отсечения и отрицания.

**Упражнение 7.1.** Вычислить ответы на запрос  $G : ? A(X)$  к программе  $\Pi$

$$\begin{aligned} A(Y) &\leftarrow B(Y), C(a_2, Y); \\ A(X) &\leftarrow D(a_1, X), C(X, Y); \\ B(U) &\leftarrow D(U, V), !, E(V); \\ B(V) &\leftarrow E(a_5); \\ E(a_2) &\leftarrow ; \\ E(a_3) &\leftarrow ; \\ E(Z) &\leftarrow ; \\ D(U, a_1) &\leftarrow C(U, f(U)); \\ D(U, U) &\leftarrow ; \\ D(X, a_2) &\leftarrow ; \\ C(Z, a_3) &\leftarrow ; \end{aligned}$$

**Упражнение 7.2.** Используя оператор отсечения написать программы решения следующих задач:

1. Вычисления наибольшего из двух чисел.  
Запрос  $? \max(X, Y, Z)$ .
2. Вычисления пересечения  $L_3$  множеств  $L_1$  и  $L_2$ , представленных неповторными списками.  
Запрос  $? \text{common}(L_1, L_2, L_3)$ .
3. Вычисления всех элементов целочисленного списка  $L_1$ , квадраты которых не содержатся в этом списке.  
Запрос  $? \text{nonsquare}(L_1, L_2)$ .

**Упражнение 7.3.** Вычислить ответы на запрос  $G : ? A(X)$  к программе  $\Pi$

$$\begin{aligned} A(Y) &\leftarrow B(Y), \text{not}(D(Y)); \\ B(a) &\leftarrow ; \\ B(b) &\leftarrow ; \\ D(U) &\leftarrow C(Y), !, E(U, Y); \\ C(a) &\leftarrow ; \\ C(b) &\leftarrow ; \\ E(a, b) &\leftarrow ; \\ E(b, a) &\leftarrow ; \end{aligned}$$

**Упражнение 7.4.** Используя оператор **not**, написать логические программы решения следующих задач

1. Вычисления максимального элемента списка  $L$ .  
Запрос  $? \max(L, x)$ .

2. Вычисления списка самого длинного слова в тексте  $L$ .  
Запрос ? `max_occur(L1, L2)`.
3. Вычисления кратчайшего пути между двумя вершинами в ориентированном графе, представленном списком дуг  $\Gamma$ .  
Запрос ? `short_path(v1, v2,  $\Gamma$ , L)`.

**Упражнение 7.5.** Представляя граф  $G$  посредством пары списков, — списка вершин  $V$  и списка ребер  $E$ , — написать логические программы решения теоретико-графовых задач.

1. Для заданного графа  $G$  и пары вершин  $x, y$  выяснить, существует ли путь, соединяющий  $x$  и  $y$  в  $G$ . Запрос ? `reach(V, E, x, y)`.
2. Проверить выполнение программы для запросов  
? `reach(a.b.c.d.nil, (a.b.nil).(b.c.nil), (c.a.nil), (b.d.nil).nil, a, d)`
3. Для заданного графа  $G$  и пары вершин  $x, y$  построить кратчайший путь, соединяющий  $x$  и  $y$ . Запрос ? `short_path(V, E, x, y, L)`.
4. Для заданного графа  $G$  построить наименьшую его правильную раскраску.