Лекция: Конечные автоматы (КА) без выхода (конечные автоматы-распознаватели). Диаграммы переходов. Автоматные множества (языки). Лемма о свойствах автоматных множеств. Пример неавтоматного множества.

Лектор - доцент Селезнева Светлана Николаевна

Лекции по “Дискретной математике 2”.
1-й курс, группа 141,
факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.su

Определение конечного автомата без выхода

Конечный (детерминированный) автомат без выхода – это

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

где

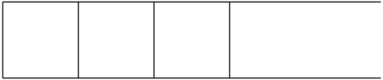
$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad n \geq 1,$	– входной алфавит;
$Q = \{q_1, \ldots, q_r\}, \quad r \geq 1,$	– множество состояний;
$\psi : A \times Q \to Q$	– функция переходов;
$q_1 \in Q$	– начальное состояние;
$F \subseteq Q$	– множество заключительных состояний.

Содержательное понимание конечного автомата без выхода

Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):

Содержательное понимание конечного автомата без выхода

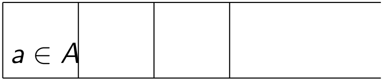
Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):



Содержательное понимание конечного автомата без выхода

Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):

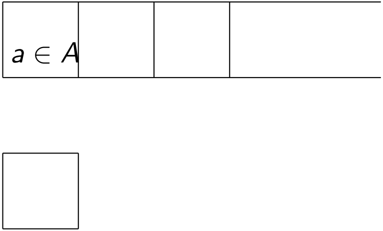
Входная лента



Содержательное понимание конечного автомата без выхода

Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):

Входная лента



Содержательное понимание конечного автомата без выхода

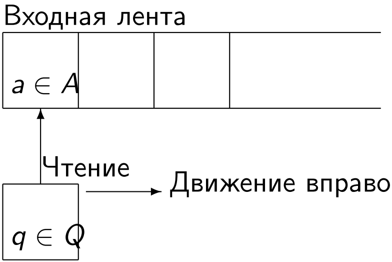
Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):

Содержательное понимание конечного автомата без выхода

Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):

Содержательное понимание конечного автомата без выхода

Содержательно конечный автомат без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ можно понимать в виде абстрактного устройства (распознавателя):



Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$

a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$

a_{i_1}	a_{i_2}	$\dots$	a_{i_k}	

q_1

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$

a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

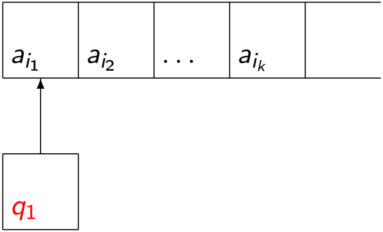
$\mathbf{t = 1}$

q_1

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$

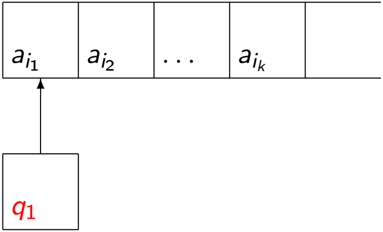


$\mathbf{t = 1}$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



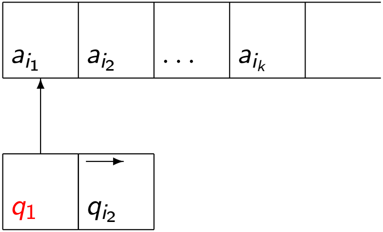
$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



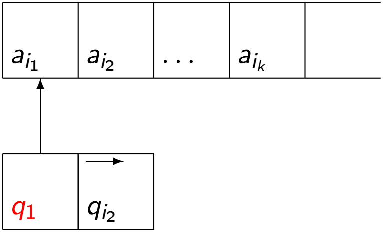
$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

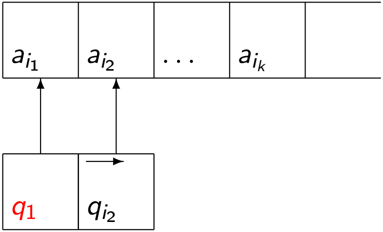
$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t} = \mathbf{1}$

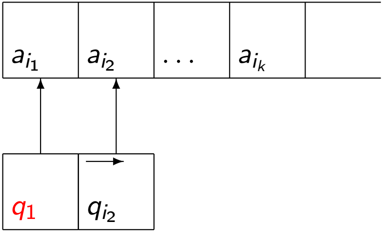
$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t} = \mathbf{2}$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

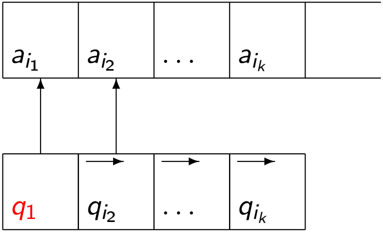
$\mathbf{t = 2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

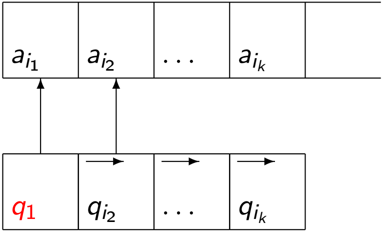
$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$\dots$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

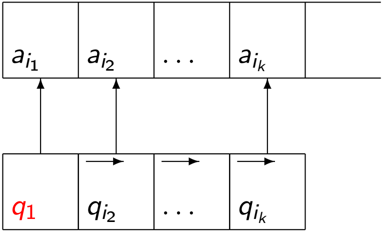
$\ldots$

$\mathbf{t = k}$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

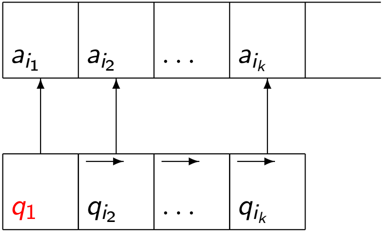
$\dots$

$\mathbf{t = k}$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$\dots$

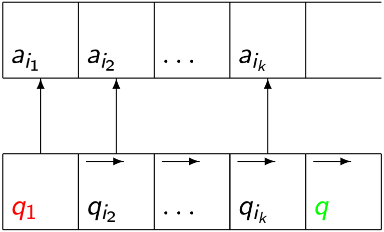
$\mathbf{t = k}$

$q = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t = 1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t = 2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$\ldots$

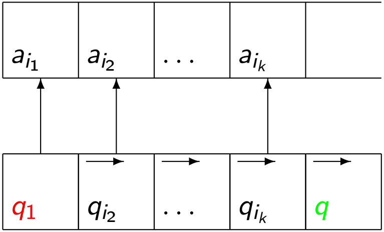
$\mathbf{t = k}$

$q = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$

Функционирование конечного автомата без выхода

Функционирование автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$:

На входной ленте – слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} \in A^*$



$\mathbf{t} = \mathbf{1}$

$q_{i_2} = \psi(a_{i_1}, q_1)$

$\mathbf{t} = \mathbf{2}$

$q_{i_3} = \psi(a_{i_2}, q_{i_2})$

$\ldots$

$\mathbf{t} = \mathbf{k}$

$q = \psi(a_{i_k}, q_{i_k})$

если $q \in F$, то слово α **принимается** автоматом;

если $q \notin F$, то слово α **отвергается** автоматом.

Функционирование конечного автомата без выхода

Т.е. автомат без выхода "прочитывает" конечное слово $\alpha \in A^*$, записанное на входной ленте.

После "прочтения" этого слова автомат перешел и находится в некотором состоянии $q \in Q$.

В зависимости от того, принадлежит или нет состояние q множеству заключительных состояний F, автомат или принимает слово α, или не принимает его.

Языки

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – конечный алфавит.

Языком в алфавите A называется произвольное подмножество множества A^* конечных слов в этом алфавите.

Например, если $A = \{0, 1\}$, то множество

$$L = \{0\alpha 1 \mid \alpha \in A^*\}$$

слов из нулей и единиц, начинающихся с нуля и оканчивающихся на единицу, – язык в алфавите A.

Язык, принимаемый конечным автоматом без выхода

В результате работы конечного автомата без выхода $\mathcal{A}$ конечное слово $\alpha \in A^*$ или **принимается**, или **отвергается**.

Т.е. конечный автомат без выхода $\mathcal{A}$ **определяет** некоторое подмножество $L(\mathcal{A}) \subseteq A^*$ слов, которые он **принимает**.

Это множество $L(\mathcal{A})$ будем называть **языком, принимаемым (или допускаемым) конечным автоматом без выхода** $\mathcal{A}$.

Обобщение функции переходов

Пусть задан автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F).$$

Функция переходов ψ по символу алфавита и состоянию автомата выдает новое состояние.

Функция ψ **однозначно** определяет функцию $\bar{\psi} : A^* \times Q \to Q$, которая по конечному слову в алфавите и состоянию автомата выдает новое состояние:

$$\bar{\psi}(a, q) = \psi(a, q);$$
$$\bar{\psi}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, q) = \bar{\psi}(a_{i_2} \dots a_{i_k}, \psi(a_{i_1}, q));$$

для всех $a \in A$, $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \in A^*$ и $q \in Q$.

Т.е. $\bar{\psi}(\alpha)$ – это то состояние, в которое переходит автомат после "прочтения" слова α.

Язык, принимаемый конечным автоматом без выхода

При помощи функция $\bar{\psi}$ просто записать язык, принимаемый конечным автоматом без выхода.

Язык, принимаемый конечным автоматом без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$$

– множество

$$L(\mathcal{A}) = \{\alpha \in A^* \mid \bar{\psi}(\alpha, q_1) \in F\}.$$

Диаграмма переходов автомата без выхода

Рассмотрим способы задания конечных автоматов-распознавателей и автоматных языков.

1. Диаграмма переходов (диаграмма Мура).
Диаграммой переходов конечного автомата $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$ называется ориентированный граф (псевдограф) с пометками

$$D_{\mathcal{A}} = (V_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{A}}),$$

где
$V_{\mathcal{A}} = Q$;
$E_{\mathcal{A}} = \{(q, \psi(a, q)) \mid a \in A, q \in Q\}$;
причем
дуге $(q, \psi(a, q)) \in E$ приписана пометка a;
вершина $q_1 \in V$ помечена "звездочкой" $*$;
вершины $q \in F$ помечены символом "f".

Диаграмма переходов автомата без выхода

Т.е. в **диаграмме переходов** конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$

вершины – это состояния автомата;

если из состояния $q \in Q$, “прочитывая” символ $a \in A$ автомат переходит в состояние $q' \in Q$, то в диаграмме переходов из вершины q проводится дуга в вершину q', причем эта дуга имеет пометку a;

начальное состояние $q_1 \in Q$ помечается символом $*$;

вершины из множества $F \subseteq Q$ (заключительные состояния) помечаются символом f (или как-то иначе).

Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2

Пример диаграммы переходов

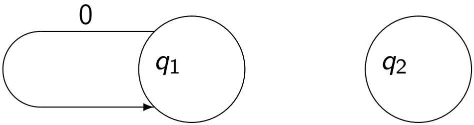
Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2

Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

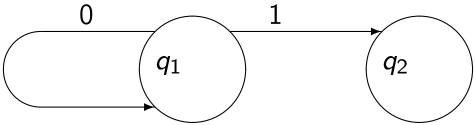
q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

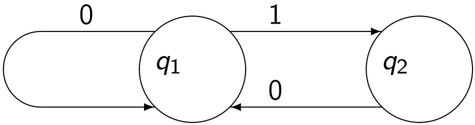
q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

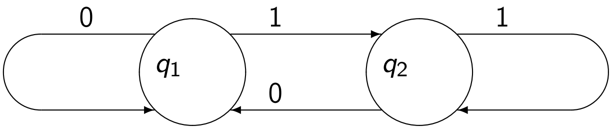
q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

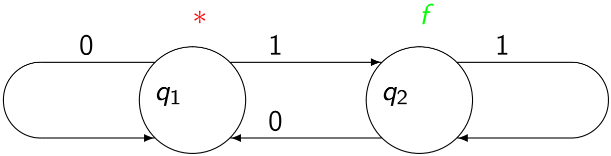
q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

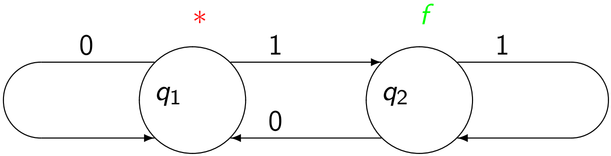
q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Пример диаграммы переходов

Пример 1. Постороим диаграмму переходов конечного автомата без выхода $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$, где $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $F = \{q_2\}$ и

q_1	a	$\psi(a, q_1)$
q_1	0	q_1
q_1	1	q_2
q_2	0	q_1
q_2	1	q_2



Заметим, что этот автомат принимает все слова из нулей и единиц, оканчивающиеся единицей.

Конечные автоматы без выхода

Конечные автоматы без выхода являются моделью дискретного устройства с конечной памятью.

Они работают над последовательностями символов и в процессе работы используют конечную память (конечное число "состояний").

Устройства с конечной памятью находят применения в ряде математических дисциплин: теории алгоритмов, кибернетике, программировании, теории графов и теории формальных языков.

Конечные автоматы в технике

Конечные автоматы часто подходят для математического моделирования в технике.

Почти каждое достаточно сложное техническое устройство можно рассматривать как конечный автомат.

Многие промышленные и бытовые преобразователи (механические, электромеханические, электронные) относятся к конечным автоматам.

Автомат по продаже билетов

Пример 2. В качестве примера смоделируем автомат по продаже билетов в метро.

Для простоты положим, что автомат принимает только монеты одного достоинства, и стоимость билета 3 монеты.

Автомат "ждет", пока не получит трех монет, а когда их получает, переходит в состояние (заключительное), в котором "выдает" билет.

У нас очень простая модель автомата: он ничего не делает, если вносятся "неправильные" монеты, не выдает сдачу и т.д.

Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ “правильной” монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

Получаем диаграмму переходов:

Автомат по продаже билетов

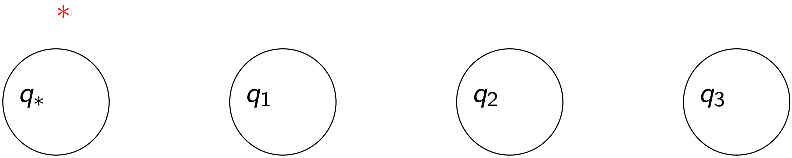
Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ “правильной” монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

Получаем диаграмму переходов:

Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ “правильной” монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

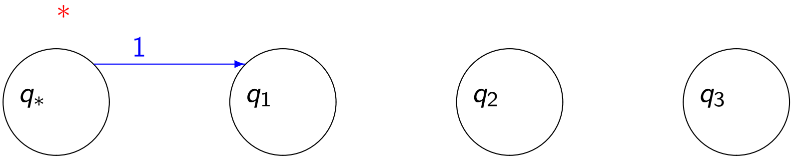
Получаем диаграмму переходов:



Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ "правильной" монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

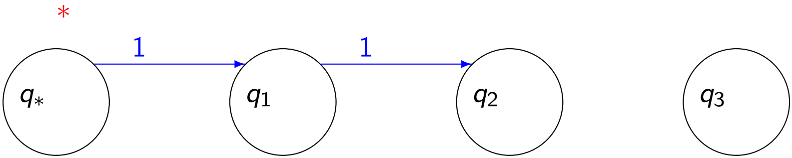
Получаем диаграмму переходов:



Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ "правильной" монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

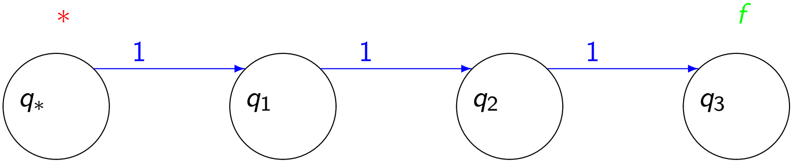
Получаем диаграмму переходов:



Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ "правильной" монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

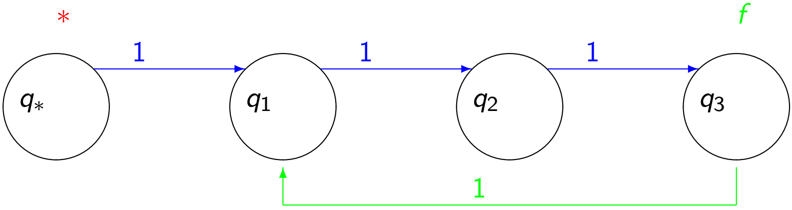
Получаем диаграмму переходов:



Автомат по продаже билетов

Введем алфавит $A = \{1\}$, 1 – символ "правильной" монеты. Введем множество состояний $Q = \{q_*, q_1, q_2, q_3\}$, где q_* – начальное состояние, если автомат находится в состоянии q_i, $i = 1, 2, 3$, то внесено i монет. Понятно, что $F = \{q_3\}$ – внесено три монеты.

Получаем диаграмму переходов:



Возможности конечных автоматов

Мы хотим понять возможности конечных автоматов без выхода (как математического объекта): что можно ими моделировать?

Мы знаем, что каждый конечный автомат без выхода определяет некоторое множество слов – множество тех слов, которые этот автомат **принимает**.

А какие множества слов могут приниматься конечными автоматами? Может быть, все?

Далее мы увидим, что не каждое множество слов может приниматься конечным автоматом.

Автоматные множества

Пусть A – конечный алфавит.

Множество (язык) $L \subseteq A^*$ называется **автоматным множеством** (**языком**), если найдется конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

для которого $L(\mathcal{A}) = L$.

Т.е. L – автоматное множество, если найдется конечный автомат без выхода, который **принимает в точности** это множество L.

Пример автоматного множества

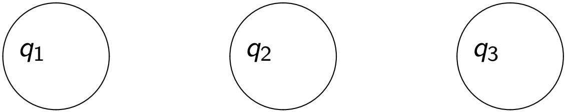
Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.

Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

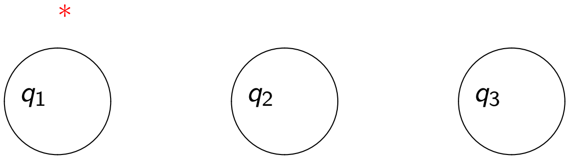
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

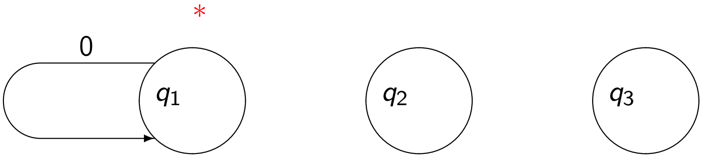
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

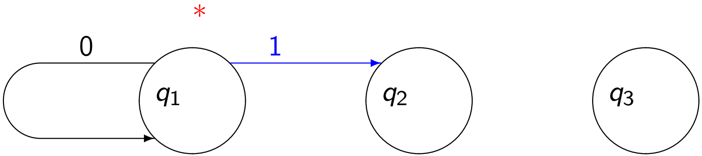
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

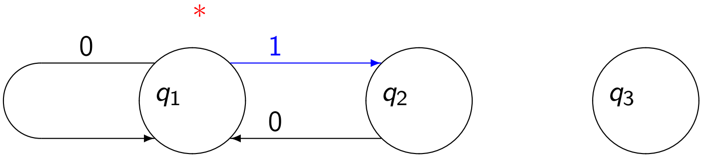
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

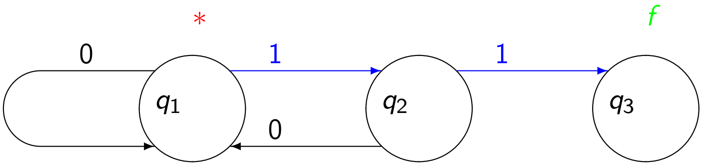
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

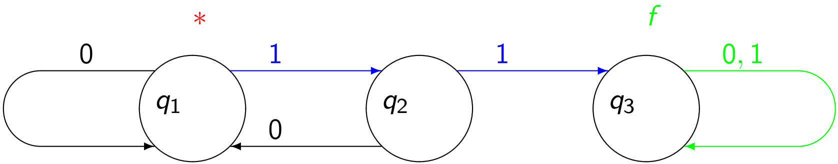
Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Пример автоматного множества

Пример 3. Пусть $A = \{0, 1\}$, $L \subseteq A^*$, и множество L содержит **все** слова из нулей и единиц, в которых есть две единицы подряд, и только их.

Докажем, что множество L является автоматным, построив диаграмму переходов автомата без выхода, принимающего язык L.



Еще примеры автоматных множеств

Пример 4. Пусть A – некоторый конечный алфавит. Докажем, что следующие множества $L \subseteq A^*$ являются автоматными.

1. $L = A^*$ – множество **всех** слов. Заметим, что $L = L(\mathcal{A}_1)$, где

$$\mathcal{A}_1 = (A, Q_1 = \{q_1\}, \psi_1, q_1, F_1 = \{q_1\}),$$

и $\psi_1(a, q_1) = q_1$ при $a \in A$.

2. $L = \emptyset$ – **пустое** множество. Можно заметить, что, например, $L = L(\mathcal{A}_2)$, где

$$\mathcal{A}_2 = (A, Q_1 = \{q_1, q_2\}, \psi_2, q_1, F_2 = \{q_2\}),$$

и $\psi_2(a, q_1) = q_1$; $\psi_2(a, q_2) = q_2$ при $a \in A$.

Лемма о свойстве автоматных множеств

Лемма 1. *Пусть* $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ *– конечный алфавит и* $L = L(\mathcal{A})$, *где* $\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F)$. *Если* $\alpha \in L$ *и* $|\alpha| \geq |Q|$, *то слово* α *можно представить в виде* $\alpha = \alpha' \beta \alpha''$, *где* $\alpha', \alpha'', \beta \in A^*$, $\beta \neq \Lambda$ *(т.е.* β *–* **непустое** *слово), причем* $|\alpha' \beta| \leq |Q|$, *таким образом, что каждое из слов*

$$\alpha' \underbrace{\beta \dots \beta}_{m} \alpha'', \quad m \geq 1,$$

также принадлежит множеству L.

Доказательство. По условию $L = L(\mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F).$$

Пусть $|Q| = r$, т.е. автомат $\mathcal{A}$ содержит r состояний.

Лемма о свойстве автоматных множеств

Доказательство (продолжение). Слово α принадлежит множеству L, и $|\alpha| = k \geq r$. Посмотрим, **в каких состояниях** автомат $\mathcal{A}$ будет "прочитывать" слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$:

a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

q_1 $\quad$ q_{i_2} $\quad$ $\ldots$ $\quad$ q_{i_k} $\quad$ $q_{i_{k+1}}$, $\quad$ $q_{i_{k+1}} \in F$

Лемма о свойстве автоматных множеств

Доказательство (продолжение). Слово α принадлежит множеству L, и $|\alpha| = k \geq r$. Посмотрим, **в каких состояниях** автомат $\mathcal{A}$ будет "прочитывать" слово $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$:

a_{i_1}	a_{i_2}	$\ldots$	a_{i_k}	

$$q_1 \qquad q_{i_2} \qquad \ldots \qquad q_{i_k} \qquad q_{i_{k+1}}, \quad q_{i_{k+1}} \in F$$

Т.к. у автомата $\mathcal{A}$ всего r состояний, и $k \geq r$, заключаем, что среди состояний

$$q_1,\ q_{i_2},\ \ldots,\ q_{i_k},\ q_{i_{k+1}}$$

по меньшей мере два **совпадающие**.

Лемма о свойстве автоматных множеств

Доказательство (продолжение). Пусть $q_{i_s} = q_{i_t}$, $s < t$. Тогда положим

$$\alpha' = a_{i_1} \dots a_{i_{s-1}}, \quad \beta = a_{i_s} \dots a_{i_{t-1}}, \quad \alpha'' = a_{i_t} \dots a_{i_k}.$$

Понятно, что $\alpha = \alpha'\beta\alpha''$, $\beta \neq \Lambda$ и $|\alpha'\beta| \leq r$.

Посмотрим, как автомат $\mathcal{A}$ будет "прочитывать" слово $\alpha' \underbrace{\beta \dots \beta}_{m} \alpha''$:

α'	β	$\dots$	β	α''		
q_1	q_{i_s}	$\dots$	q_{i_s}	q_{i_t}	$q_{i_{k+1}}$,	$q_{i_{k+1}} \in F$

Лемма о свойстве автоматных множеств

Доказательство (продолжение). Пусть $q_{i_s} = q_{i_t}$, $s < t$. Тогда положим

$$\alpha' = a_{i_1} \dots a_{i_{s-1}}, \quad \beta = a_{i_s} \dots a_{i_{t-1}}, \quad \alpha'' = a_{i_t} \dots a_{i_k}.$$

Понятно, что $\alpha = \alpha'\beta\alpha''$, $\beta \neq \Lambda$ и $|\alpha'\beta| \leq r$.

Посмотрим, как автомат $\mathcal{A}$ будет "прочитывать" слово $\alpha' \underbrace{\beta \dots \beta}_{m} \alpha''$:

α'	β	$\dots$	β	α''	
q_1	q_{i_s}	$\dots$	q_{i_s}	q_{i_t}	$q_{i_{k+1}}$, $q_{i_{k+1}} \in F$

Т.е. $\alpha' \underbrace{\beta \dots \beta}_{m} \alpha'' \in L$. □

Пример неавтоматного множества

Теперь мы можем привести пример неавтоматного множества.

Следствие 1.1. *Пусть $A = \{0, 1\}$. Тогда множество*

$$L = \{0^m 1^m \mid m \geq 1\}$$

не является автоматным.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что множество L – автоматное. Значит, найдется конечный автомат без выхода

$$\mathcal{A} = (A, Q, \psi, q_1, F),$$

такой, что $L = L(\mathcal{A})$. Пусть $|Q| = r$. Рассмотрим слово $\alpha = 0^r 1^r \in L$. Тогда по лемме 1 найдется такое слово 0^l, $l \geq 1$, что слово $0^{r+l} 1^r \in L$. Получаем противоречие, т.к. из описания множества L видно, что $0^{r+l} 1^r \notin L$. $\square$

Задачи для самостоятельного решения

1. Смоделировать автомат по продаже билетов в метро конечным автоматом без выхода при условии, что автомат принимает монеты достоинством 1 и 2, а стоимость билета 3 единицы. Полагаем, что автомат сдачу не выдает, а продает то количество билетов, которое можно купить внесенной суммой. Например, если внесено 4 единицы, автомат выдает 1 билет.

2. Доказать, что конечным автоматом без выхода **невозможно** проверить правильность скобочной структуры в выражении. Т.е. доказать неавтоматность множества $L \subseteq A^*$, где $A = \{(,)\}$, и $\alpha \in L$, если в слове α **правильно** расставлены скобки, т.е., например, $(()) \in L$, $(()()) \in L$, но $()(\notin L$.

Литература к лекции

1. Марченков С.С. Конечные автоматы. М.: Физматлит, 2008.

Конец лекции