

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 1

Вступление:

Что такое логика

Содержание лекций

Несколько логических парадоксов

Лектор:

Подымов Владислав Васильевич

E-mail:

valdus@yandex.ru

Что такое логика

Логика¹ — это наука об общезначимых формах и средствах мысли, необходимых для рационального познания в любой области знания

Логика² — это нормативная наука о формах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, осуществляемой с помощью языка

Логика³ — это наука, которая изучает, каким образом мы выражаем мысли, делаем умозаключения, и как всё это можно представить формально

Логика⁴ — это наука о правильных способах рассуждения, то есть таких, при которых из верных исходных положений получаются верные результаты

¹ Философский энциклопедический словарь.

² Бочаров, Маркин. Основы логики.

³ Метакидес, Нероуд. Принципы логики и логического программирования.

⁴ Успенский, Верещагин, Плиско. Вводный курс математической логики.

Что такое логика

Формальная логика¹ — это наука о законах знания, полученного из ранее установленных и проверенных истин, без обращения в каждом конкретном случае к опыту, а только в результате применения законов и правил мышления

Формальная логика² — сейчас это синоним логики

Математическая логика³ — это

- 1) логика, развиваемая с помощью математических методов,
- 2) логика, используемая в математике

Математическая логика⁴ — это раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов оснований математики

¹ Кондаков. Логический словарь-справочник.

² Философский энциклопедический словарь.

³ Клини. Математическая логика.

⁴ Математическая энциклопедия.

Что такое логика

Формальная математическая логика изучает

- ▶ **законы** причинно-следственной связи в окружающем мире
- ▶ проявление этих законов в **рациональном мышлении** человека
- ▶ отражение этих законов в **языках**,
 - ▶ как естественных,
 - ▶ так и искусственных
- ▶ **формы**, в которых проявляются эти законы, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся

Что такое логика

Например:

Из того, что
все люди смертны
и
Сократ — человек
следует, что
Сократ смертен

Из того, что
у змей нет лап
и
уж — змея
следует, что
у ужа нет лап

Из того, что
каждый металл — проводник
и
ртуть — металл
следует, что
ртуть — проводник

Эти высказывания относятся к совершенно разным областям и имеют совершенно разный смысл, но в целом одинаковую **форму**

Что такое логика

Например:

Вот эта **форма**:

Из того, что

каждый предмет, обладающий свойством **A**
обладает и свойством **B**

и

предмет **c** обладает свойством **A**

следует, что

предмет **c** обладает свойством **B**

Это один из **законов** логики, не зависящий от точного смысла **A**, **B** и **c**

Подходящим способом **интерпретируя** **A**, **B** и **c** в этом законе,
можно получить из него упомянутые высказывания и многие другие

При этом сам закон **не зависит** от выбранной интерпретации

Что такое логика

Законами логики описываются универсальные способы преобразования *информации* из одной формы в другую

Например:

“У змей нет лап, и уж — змея”

В этой фразе (форме) скрыта информация о том, что у ужа нет лап

Упомянутый закон логики позволяет извлечь эту информацию, представив её в новой форме:

“У ужа нет лап”

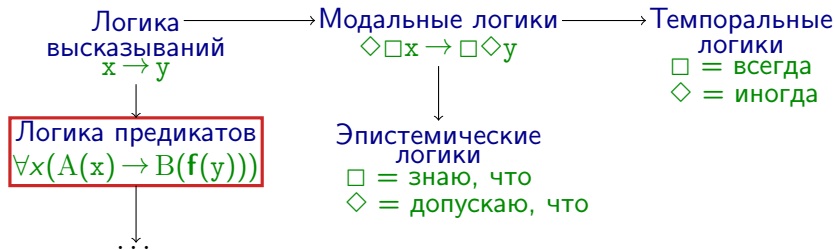
Имейте в виду, что при помощи законов логики нельзя получить новую информацию, а можно только преобразовать форму имеющейся информации

Содержание лекций

Способ представления информации и принципы работы с ней определяются тем, как выбраны:

- ▶ интересующие особенности высказываний
- ▶ **язык**, адекватно описывающий эти особенности
- ▶ средства анализа высказываний выбранного языка

В курсе встретятся следующие разделы логики с соответствующими искусственными языками:



Содержание лекций

Смысл элементарных составных частей “реальных” высказываний часто задаётся способами, выходящими за рамки логики

Например:

“Два плюс два — это четыре”

Что такое “два”?

Что такое “четыре”?

Что такое “плюс”?

Смысл высказывания основывается на ответах на эти (нелогические) вопросы

На том, как можно

- ▶ определять и анализировать нелогические понятия средствами логики и
- ▶ отличать “хорошие” определения и методы анализа от “плохих”,

будет сосредоточено внимание в части курса, посвящённой

**аксиоматическим теориям и
формальным доказательствам**

А зачем уделять всему этому столько внимания?

В лекциях иногда будут встречаться фразы о том, где могут пригодиться конкретные обсуждаемые задачи, методы и разделы логики

Но уже сейчас можно задуматься о простых для восприятия задачах, которые непросто решить без должных знаний из области логики:
логических парадоксах

Несколько логических парадоксов

Парадокс лжеца

(думаю, что все знают этот парадокс; а кто не знает — запоминайте)

Это утверждение ложно

Ложно ли утверждение выше?

Несколько логических парадоксов

Парадокс Рассела

(а этот парадокс должны знать все математики)

Пусть Ω — множество всех множеств,
не содержащих себя в качестве элемента:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \notin \omega\}$$

Верно ли соотношение $\Omega \in \Omega$?

Несколько логических парадоксов

Дилемма крокодила

Крокодил схватил ребёнка.

Мать ребёнка просит крокодила:

“Верни мне ребёнка!”

На что получает такой ответ от крокодила:

“Я верну тебе ребёнка,
если ты угадаешь, исполню ли я твою просьбу”

Если мать ответит “вернёшь”, получит ли она ребёнка?

А если мать ответит “не вернёшь”?

Несколько логических парадоксов

Парадокс утренней звезды

Венера видна **ранним утром**,
и поэтому её называют “**утренней звездой**”

Венера видна **поздним вечером**,
и поэтому её называют “**вечерней звездой**”

Означает ли это, что **утренняя звезда**
видна поздним вечером?

Несколько логических парадоксов

Парадокс лысого
(он же "парадокс кучи")

Если у человека нет ни одного волоса, то он лыс

Если у лысого вырастет ещё один волосок, то он останется лысым

Значит, все люди лысые?

Несколько логических парадоксов

Парадокс пьяницы

Теорема. Все, кто здесь присутствует, пьют.

Доказательство.

Здесь присутствует человек, такой что если он пьёт, то все пьют. (*)

Я пью.

Значит, все пьют. ▼

Лемма. (*)

Доказательство.

Если все в этой комнате пьют,
то этот человек — любой из присутствующих (например, я).

Иначе один из присутствующих (x) — непьющий.

Пусть A — утверждение “ x пьёт”, и B — утверждение “все пьют”.

Утверждение A ложно, а значит, утверждение “если A , то B ” истинно. ▼

Почему это доказательство неправильное?

Несколько логических парадоксов

Парадокс морской битвы

Флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва.

Прорицатель ответил: “Битва завтра состоится”.

На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.

Прорицатель ответил:

“Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко.

Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно.

Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня”.

Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны,
но их влияние можно ограничить

Чтобы обеспечить **строгость** таких ограничений,
следует использовать **логику** в тесной связи с **математикой**

Для этого (*и многого другого*) и нужна
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА