Занятие 12. Конечные автоматы и автоматные функции. Способы их представления: схемы из функциональных элементов с задержками (СФЭЗ). Упрощение конечных автоматов.

Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Страница курса на сайте http://mk.cs.msu.ru

Для разбора домашнего задания

Функция единичной задержки

Рассмотрим автоматную функцию $z : \{0,1\}^\infty \to \{0,1\}^\infty$, где

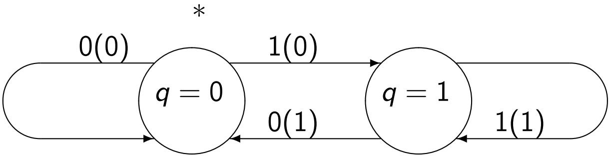
$$z(x(1)x(2)x(3)\dots x(t)\dots) = 0x(1)x(2)\dots x(t-1)\dots.$$

Она называется **функцией единичной задержки**.

Содержательно, она приписывает 0 слева к входному слову.

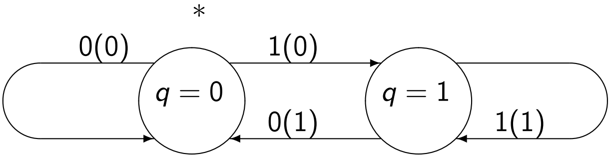
Функция единичной задержки

Диаграмма Мура функции z:



Функция единичной задержки

Диаграмма Мура функции z:



Канонические уравнения функции z:

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

СФЭ с задержками

Схемой из функциональных элементов с задержками (СФЭЗ)

$$S(x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_m(t))$$

в базисе $B = \{x\&y, x \vee y, \bar{x}\} \cup \{z\}$ называется

1) ориентированный граф $G = (V, E)$ с возможными ориентированными циклами, причем в графе G полустепень захода любой его вершины не превосходит двух;

2) любая вершина графа G с полустепенью захода, равной нулю, называется входной и ей приписывается какая-то входная переменная $x_i(t)$;

СФЭ с задержками

3) любой вершине графа G с полустепенью захода, равной единице, приписывается либо единичная задержка z, либо отрицание $^{-}$;

4) в любом ориентированном цикле графа G должна быть хотя бы одна вершина с приписанной ей единичной задержкой;

5) любой вершине графа G с полустепью захода, равной двум, приписывается либо конъюнкция $\&$, либо дизъюнкция $\vee$;

6) некоторые (в том числе и входные) вершины графа G называются выходными и им приписываются (различные) выходные переменные $y_1(t), \ldots, y_m(t)$.

СФЭЗ

Теорема. *Каждая СФЭЗ*

$$S(x_1(t), \ldots, x_n(t); y_1(t), \ldots, y_m(t))$$

осуществляет автоматное отображение входов $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *в выходы* $y_1(t), \ldots, y_m(t)$.

Теорема. *Каждый конечный автомат* $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ *может быть представлен СФЭЗ в базисе* $B = \{x \& y, x \vee y, \bar{x}\} \cup \{z\}$ *при некотором кодировании элементов из множеств* A, B, Q *наборами из нулей и единиц*.

Гл. 4, 2.13

Гл. 4, 2.13. Найти СФЭЗ автоматной функции по ее каноническим уравнениям:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Гл. 4, 2.13

Гл. 4, 2.13. Найти СФЭЗ автоматной функции по ее каноническим уравнениям:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

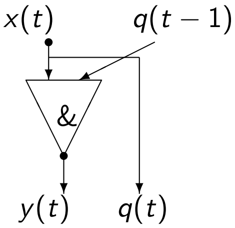
Решение. Находим СФЭЗ:

Гл. 4, 2.13

Гл. 4, 2.13. Найти СФЭЗ автоматной функции по ее каноническим уравнениям:

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим СФЭЗ:

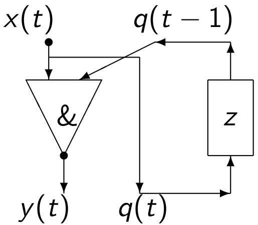


Гл. 4, 2.13

Гл. 4, 2.13. Найти СФЭЗ автоматной функции по ее каноническим уравнениям:

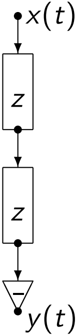
$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим СФЭЗ:



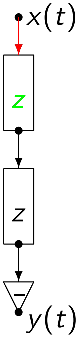
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



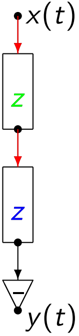
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



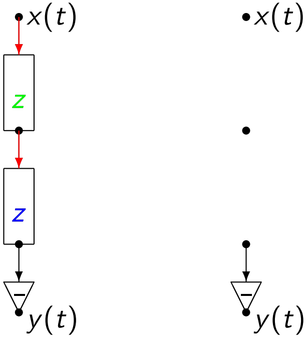
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



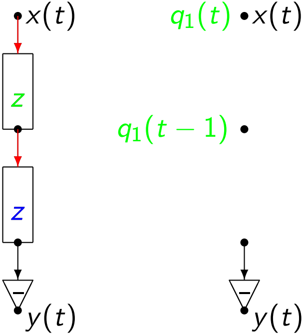
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



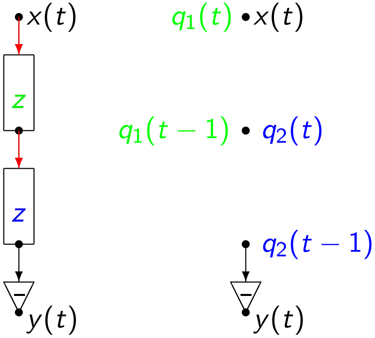
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



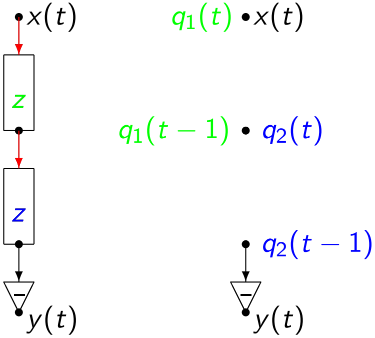
Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



Гл. 4, 2.14

Гл. 4, 2.14. Найти автоматную функцию по ее СФЭЗ:



Находим канонические уравнения:

$$\begin{cases} y(t) = \bar{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Для самостоятельного разбора: гл. 4, 2.13, 2.14

Гл. 4, 2.13(1, 4). Найти СФЭЗ автоматной функции f по ее каноническим уравнениям.

Гл. 4, 2.14(1, 3). Найти канонические уравнения автоматной функции f по ее СФЭЗ.

Для решения задач

Функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ — конечный автомат (без начального состояния).

По функциям φ и ψ определим функции

$$\bar{\varphi} : A^* \times Q \to B^* \text{ и } \bar{\psi} : A^* \times Q \to Q.$$

Для всех $a \in A$, $\alpha \in A^*$, где $|\alpha| = m \geqslant 2$, и $q \in Q$ положим:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}(\Lambda, q) = \Lambda,\\
&\bar{\varphi}(a, q) = \varphi(a, q),\\
&\bar{\varphi}(\alpha, q) = \varphi(\alpha(1), q)\bar{\varphi}(\alpha(2)\ldots\alpha(m), \psi(\alpha(1), q));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}(\Lambda, q) = q,\\
&\bar{\psi}(a, q) = \psi(a, q),\\
&\bar{\psi}(\alpha, q) = \bar{\psi}(\alpha(2)\ldots\alpha(m), \psi(\alpha(1), q)).
\end{aligned}$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Если $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$, то

1) $\bar{\varphi}(\alpha, q)$ — слово $\beta \in B^*$, в которое автомат $\mathcal{A}$ преобразует слово $\alpha \in A^*$ из состояния $q \in Q$;

2) $\bar{\psi}(\alpha, q)$ — состояние $q' \in Q$, в которое автомат $\mathcal{A}$ переходит при преобразовании слова $\alpha \in A^*$ из состояния $q \in Q$.

Отличимые и не отличимые состояния

Слово $\alpha \in A^*$ **отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$, если

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

В обратном случае слово $\alpha \in A^*$ **не отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$.

Состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **отличимыми**, если найдется слово $\alpha \in A^*$, которое их отличает, т. е.

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

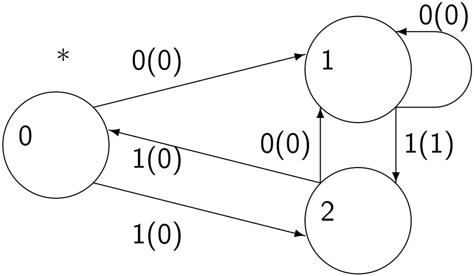
В обратном случае состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **неотличимыми**, или **эквивалентными**.

Теорема Мура

Теорема (Мура). *Пусть* $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ *— конечный автомат с* r *состояниями* ($|Q| = r$). *Если состояния* $q' \in Q$ *и* $q'' \in Q$ *отличимы, то они отличимы некоторым словом длины, не большей* $(r - 1)$.

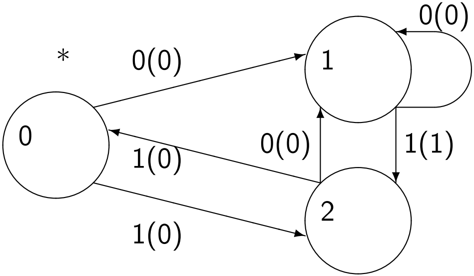
Гл. 4, 2.2

Гл. 4, 2.2. Упростить диаграмму Мура автоматной функции f:



Гл. 4, 2.2

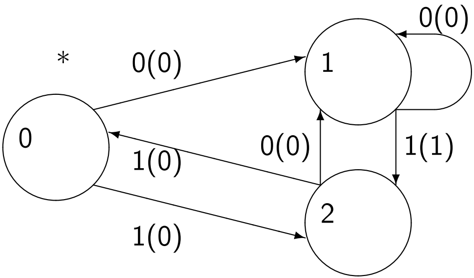
Гл. 4, 2.2. Упростить диаграмму Мура автоматной функции f:



Решение. Рассмотрим $\bar{\varphi}(\alpha, q)$, где $\alpha \in A^*$, $|\alpha| = 2$, $q \in Q$:

Гл. 4, 2.2

Гл. 4, 2.2. Упростить диаграмму Мура автоматной функции f:

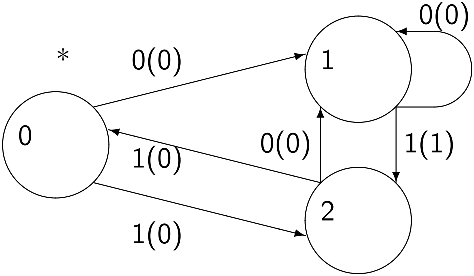


Решение. Рассмотрим $\bar{\varphi}(\alpha, q)$, где $\alpha \in A^*$, $|\alpha| = 2$, $q \in Q$:

α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00
01	01	01	01
10	00	10	00
11	00	10	00

Гл. 4, 2.2

Гл. 4, 2.2. Упростить диаграмму Мура автоматной функции f:



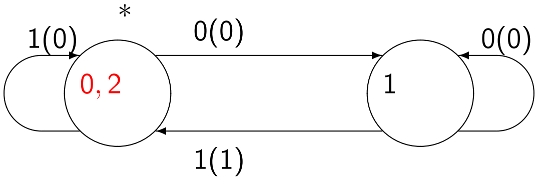
Решение. Рассмотрим $\bar{\varphi}(\alpha, q)$, где $\alpha \in A^*$, $|\alpha| = 2$, $q \in Q$:

α	$\bar{\varphi}(\alpha,0)$	$\bar{\varphi}(\alpha,1)$	$\bar{\varphi}(\alpha,2)$
00	00	00	00
01	01	01	01
10	00	10	00
11	00	10	00

$\bar{\varphi}(10,0) \neq \bar{\varphi}(10,1)$,
$\bar{\varphi}(10,1) \neq \bar{\varphi}(10,2)$,
$\bar{\varphi}(\alpha,0) = \bar{\varphi}(\alpha,2)$ при $|\alpha| = 2$.

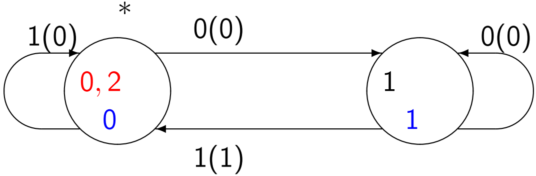
Гл. 4, 2.2

Решение (продолжение). Значит, состояния 0 и 2 не отличимы. Упростим диаграмму Мура функции f:



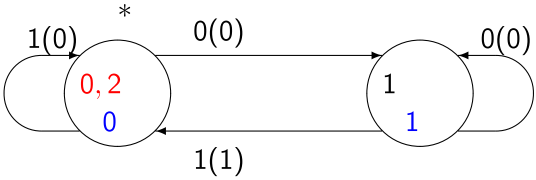
Гл. 4, 2.2

Решение (продолжение). Значит, состояния 0 и 2 не отличимы. Упростим диаграмму Мура функции f:



Гл. 4, 2.2

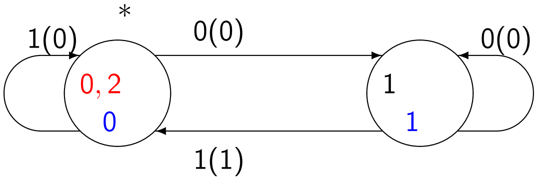
Решение (продолжение). Значит, состояния 0 и 2 не отличимы. Упростим диаграмму Мура функции f:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Гл. 4, 2.2

Решение (продолжение). Значит, состояния 0 и 2 не отличимы. Упростим диаграмму Мура функции f:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

$$\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = \bar{x}(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Гл. 4, 2.2, 2.4

Гл. 4, 2.2(2, 4, 5). Упростить диаграмму Мура автоматной функции.

Гл. 4, 2.4(1, 3, 4). Найти число отличимых состояний в диаграмме Мура автоматной функции, заданной каноническими уравнениями.

Для решения задач

Домашнее задание

По задачнику: Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

Гл. 4: 2.13(2, 3), 2.14(2, 4), 2.2(1, 3, 6), 2.4(2, 7).