Математические модели последовательных вычислений

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математические модели последовательных вычислений

Блок 8

Моделирование многочленов сетями Петри

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2022/2023, весенний семестр

Чтобы преобразовать (свести) задачи для диофантовых многочленов в задачи для сетей Петри, покажем, как можно моделировать вычисление значений многочленов сетями

Рассмотрим сеть Петри π, в которой выделены

- входные позиции $x_1, \ldots, x_n$,
- выходная позиция y и
- управляющие позиции on, off

Каждому набору $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ сопоставим входную разметку $M_{\vec{\alpha}}^{in}$ этой сети:

- $M_{\vec{\alpha}}^{in}(x_i) = \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$
- $M_{\vec{\alpha}}^{in}(on) = 1$
- $M_{\vec{\alpha}}^{in}(z) = 0$ для всех остальных позиций z

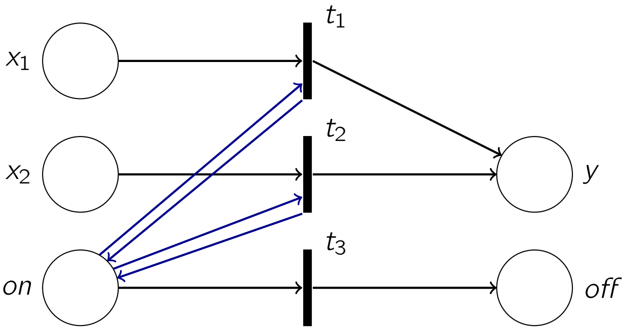
Разметку M будем называть выходной для значения $\ell \in \mathbb{N}_0$, если верно следующее:

- $M(y) = \ell$
- $M(off) = 1$
- Разметка M является тупиковой

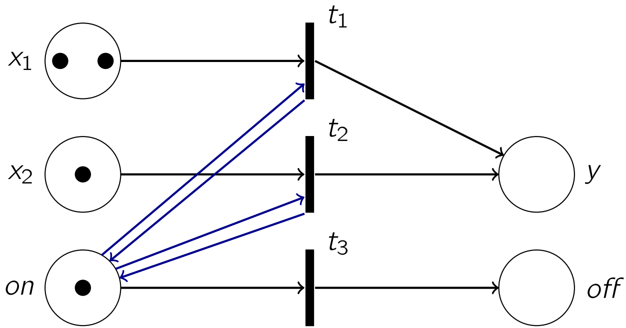
Будем говорить, что многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ моделируется сетью Петри π, если верно следующее:

- В сети содержатся
  - входные позиции $x_1, \dots, x_n$,
  - выходная позиция y и
  - управляющие позиции on, off
- Для любого набора $\vec{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ справедливо следующее:
  - Для любой разметки M, достижимой из $M^{in}_{\vec{\alpha}}$, верно $M(y) \leq P(\vec{\alpha})$
  - Для любого числа $\ell \in \mathbb{N}_0$, $\ell \leq P(\vec{\alpha})$, из $M^{in}_{\vec{\alpha}}$ достижима разметка, выходная для ℓ

Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$

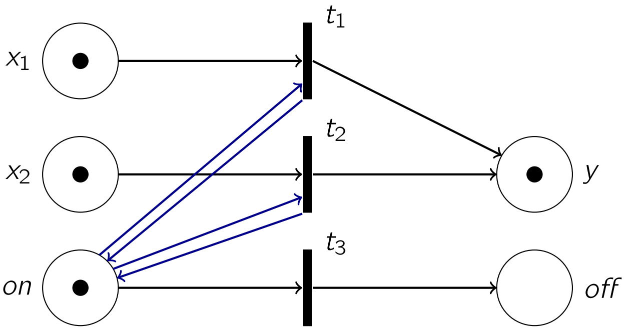


Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$



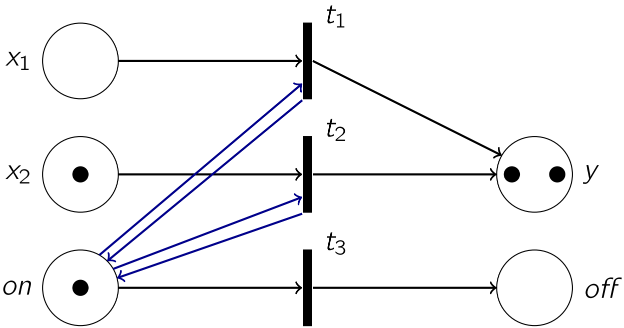
Срабатывание переходов:

Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$



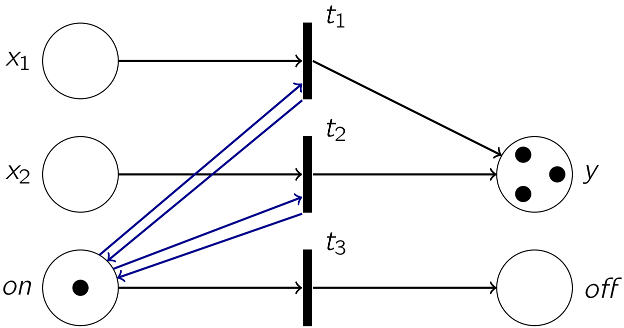
Срабатывание переходов: t_1

Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$



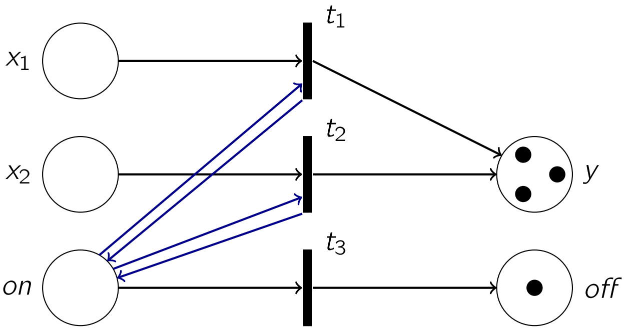
Срабатывание переходов: t_1, t_1

Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$



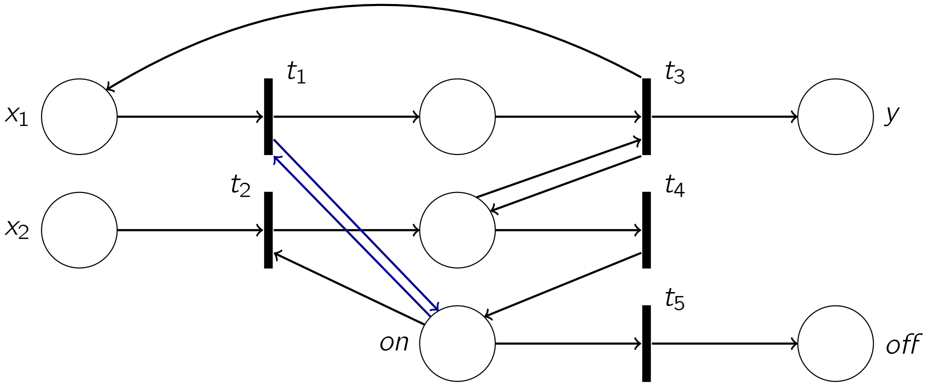
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_2

Пример: сеть π_+, моделирующая многочлен $x_1 + x_2$

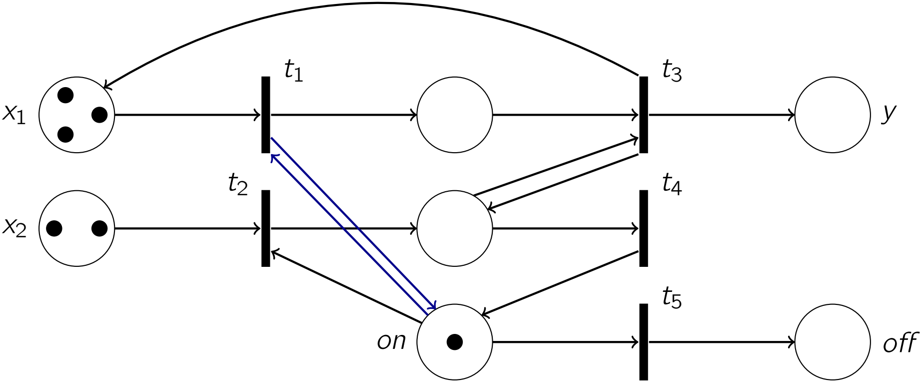


Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_2 , t_3

Пример: сеть $\pi_{\cdot}$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$

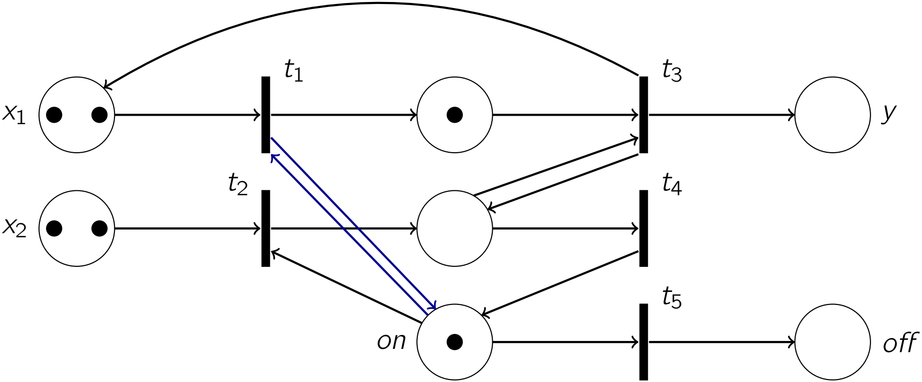


Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



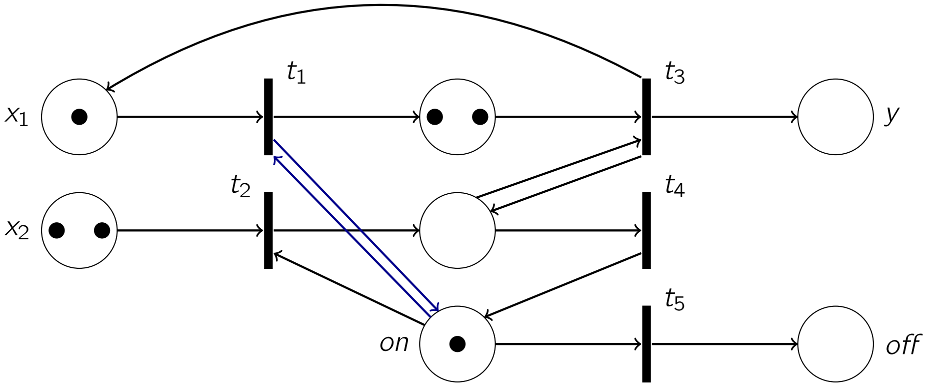
Срабатывание переходов:

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



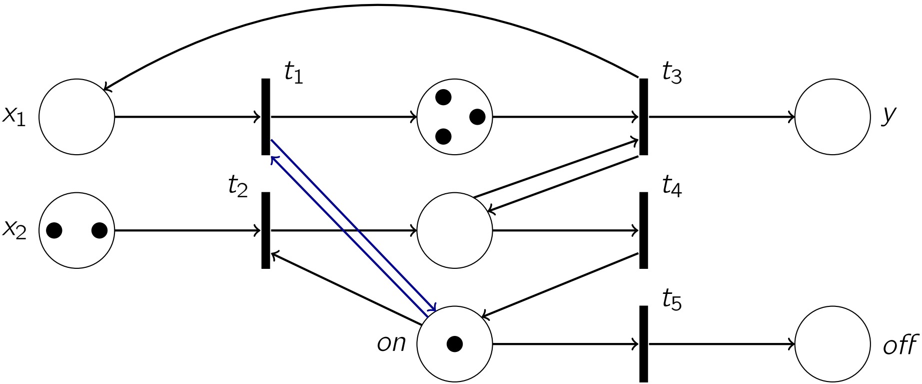
Срабатывание переходов: t_1

Пример: сеть π., моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



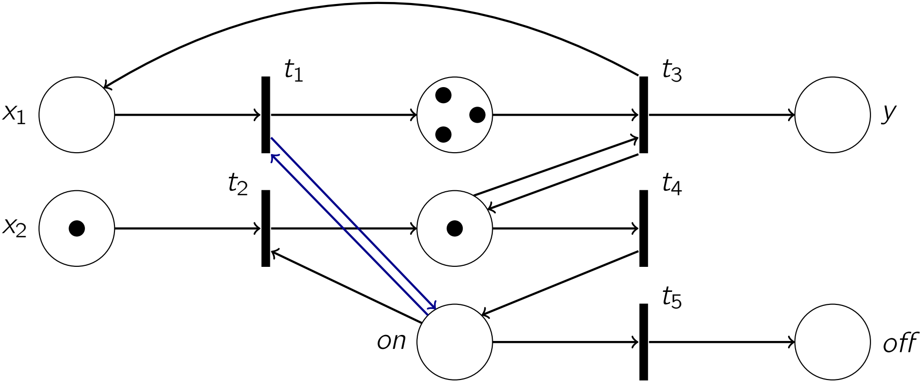
Срабатывание переходов: t_1, t_1

Пример: сеть π., моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



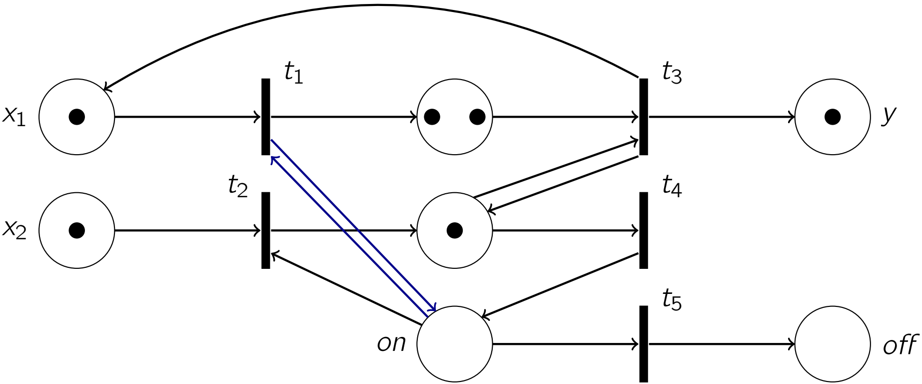
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



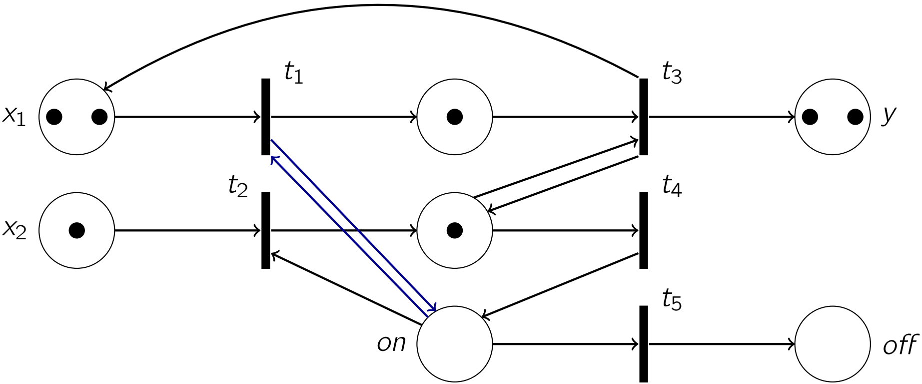
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



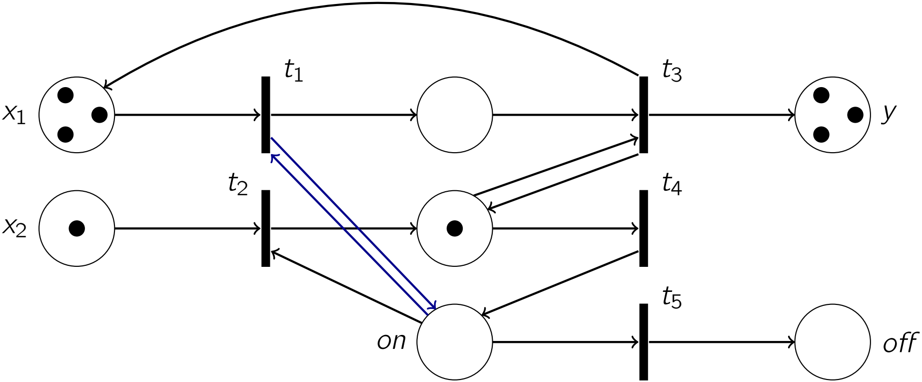
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



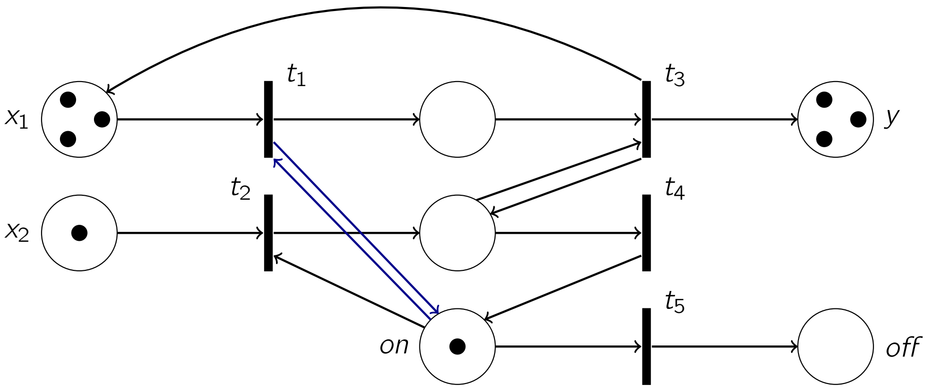
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



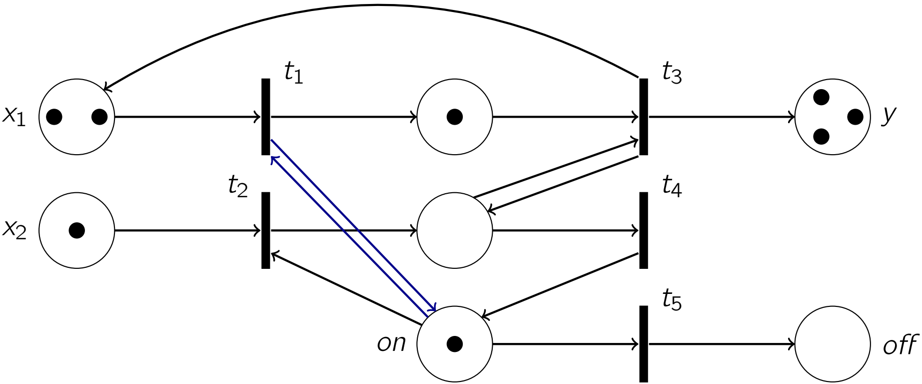
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



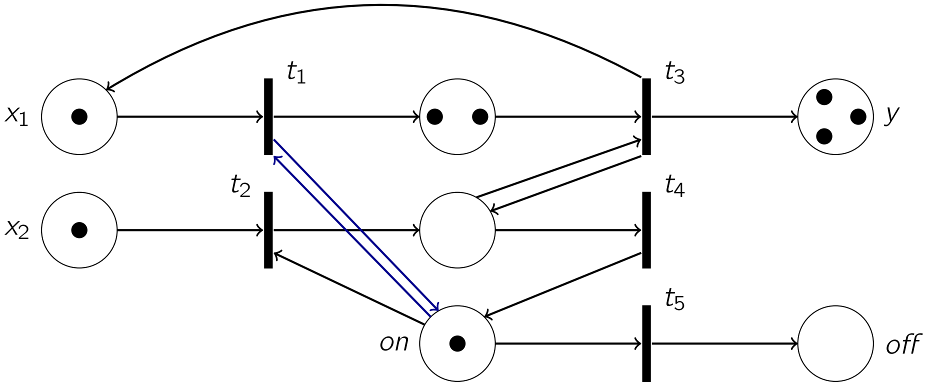
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



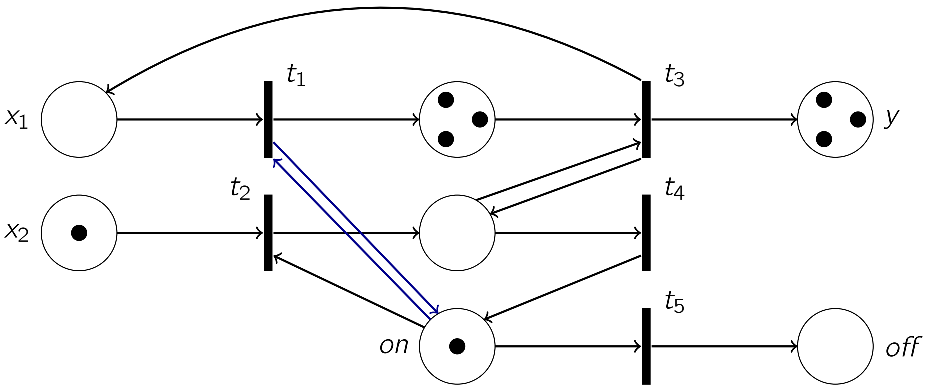
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1

Пример: сеть π., моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



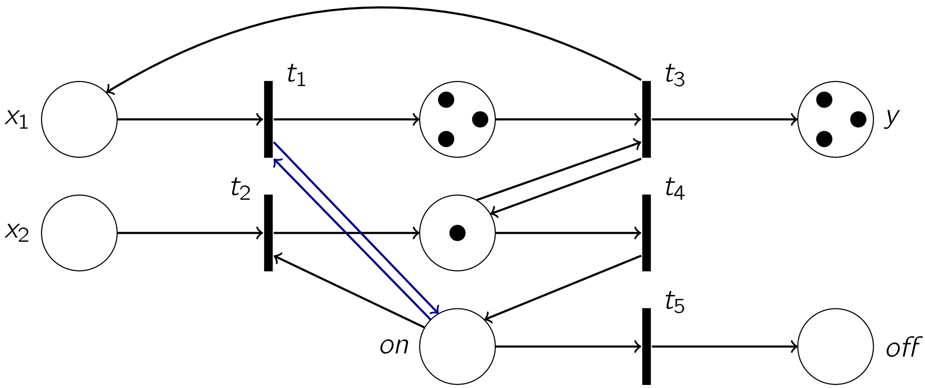
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



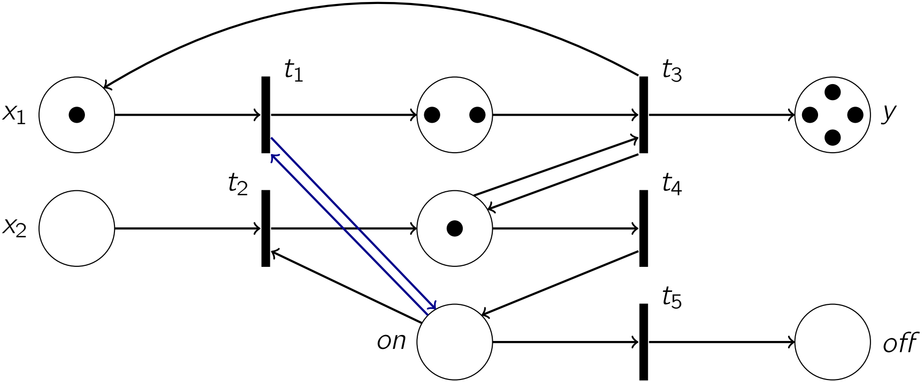
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



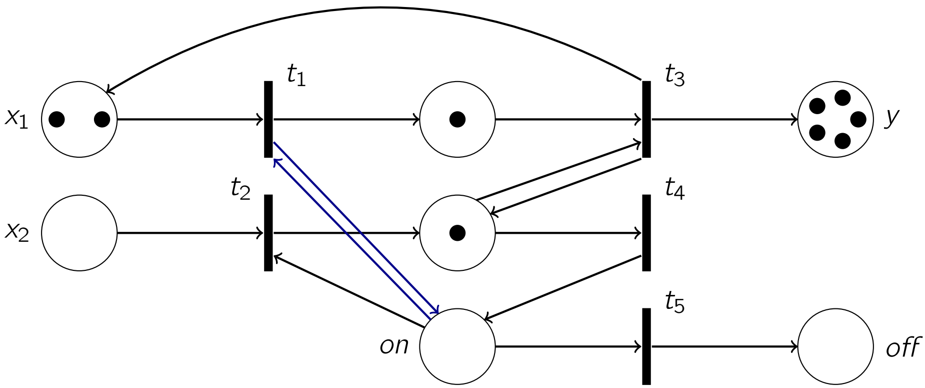
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



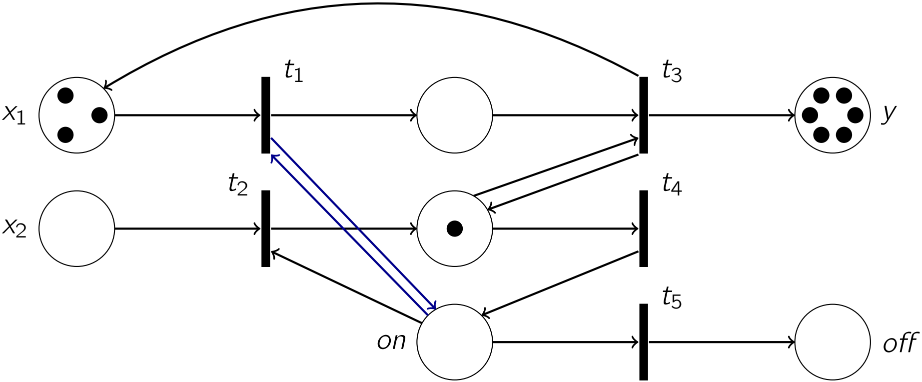
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



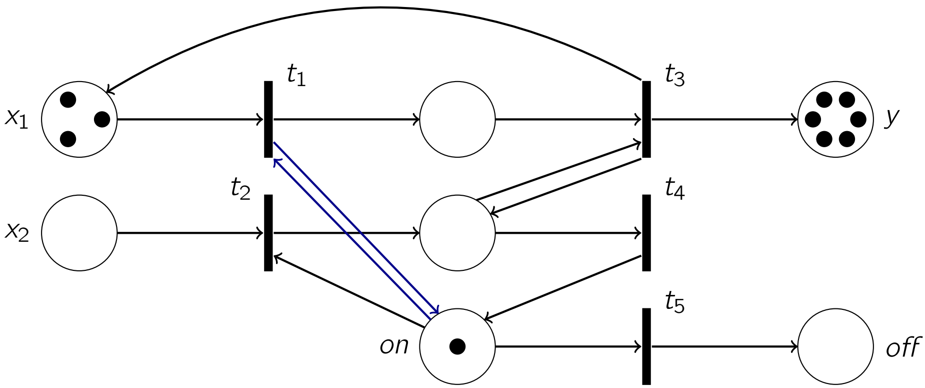
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3

Пример: сеть π., моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



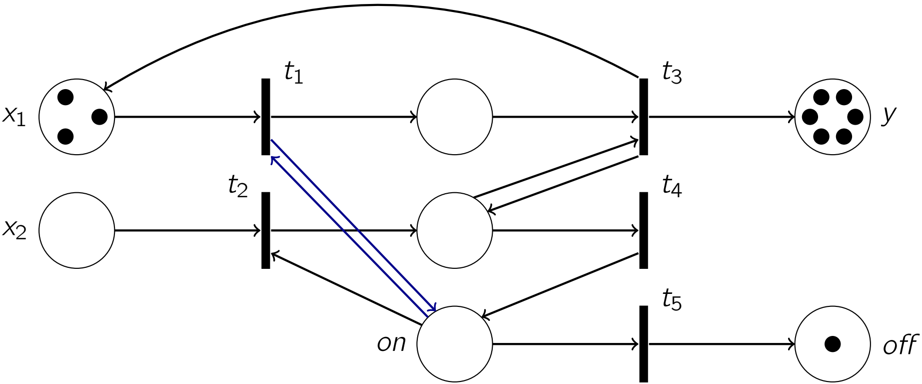
Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4

Пример: сеть $\pi.$, моделирующая многочлен $x_1 \cdot x_2$



Срабатывание переходов: t_1, t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_1 , t_1 , t_1 , t_2 , t_3 , t_3 , t_3 , t_4 , t_5

Лемма. **Сетями π_+ и $\pi.$ моделируются многочлены $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ соответственно**

Доказательство. Можете попробовать сами

Лемма. **Для любого многочлена P с неотрицательными коэффициентами существует моделирующая его сеть Петри π_P**

Доказательство. Любой многочлен можно построить из переменных и константы 1 при помощи операций $+$ и $\cdot$

Требуемая сеть Петри может быть представлена так:

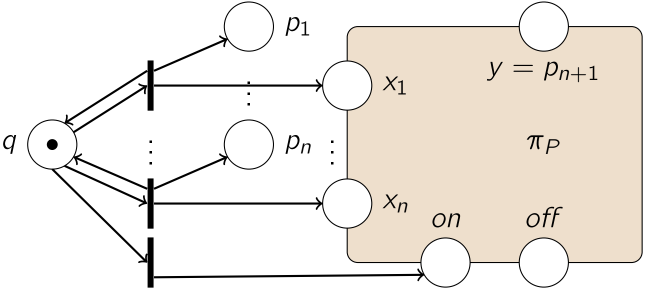
- Для шага построения $Q_1, Q_2 \mapsto Q_1 \circ Q_2$ строятся сети, моделирующие Q_1 и Q_2, и их выходные позиции объявляются соответствующими входными позициями $\pi_\circ$
- Добавляется подсеть, «размножающая» фишки из входных позиций $x_1, \ldots, x_n$, во все необходимые согласно схеме построения

Можете попробовать завершить доказательство, заполнив недостающие детали устройства сети и доказав, что эта сеть действительно моделирует P ▼

Теорема. Для любого диофантова многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ с неотрицательными коэффициентами существуют маркированная сеть Петри $\pi_{\mathcal{C}(P)}$ и её позиции $p_1, \dots, p_{n+1}$, такие что

$$\mathcal{C}(P) = \{(M(p_1), \dots, M(p_{n+1})) \mid M \in R(\pi_P)\}$$

Доказательство. Искомую сеть $\pi_{\mathcal{C}(P)}$ можно устроить так:



Пока фишка лежит в q, в $x_1, \dots, x_n$ можно положить любое число фишек $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, и столько же появится (и зафиксируется) в $p_1, \dots, p_n$

При перемещении фишки из q в *on* активируется π_P, и в p_{n+1} можно получить любое число фишек, но не более $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ▼