Лекция 18. Конечные автоматы. Отличимые и неотличимые состояния. Теорема Мура о длине слова, отличающего два отличимые состояния автомата. Упрощение конечных автоматов.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Функции $\bar\varphi$ и $\bar\psi$

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ — конечный автомат (без начального состояния).

По функциям φ и ψ определим функции

$$\bar\varphi : A^* \times Q \to B^* \text{ и } \bar\psi : A^* \times Q \to Q.$$

Для всех $a \in A$, $\alpha \in A^*$, где $|\alpha| = m \geqslant 2$, и $q \in Q$ положим:

$$\begin{aligned}
&\bar\varphi(\Lambda, q) = \Lambda,\\
&\bar\varphi(a, q) = \varphi(a, q),\\
&\bar\varphi(\alpha, q) = \varphi(\alpha(1), q)\bar\varphi(\alpha(2)\ldots\alpha(m), \psi(\alpha(1), q));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar\psi(\Lambda, q) = q,\\
&\bar\psi(a, q) = \psi(a, q),\\
&\bar\psi(\alpha, q) = \bar\psi(\alpha(2)\ldots\alpha(m), \psi(\alpha(1), q)).
\end{aligned}$$

Содержательный смысл функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

Если $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$, то

1) $\bar{\varphi}(\alpha, q)$ — слово $\beta \in B^*$, в которое автомат $\mathcal{A}$ преобразует слово $\alpha \in A^*$ из состояния $q \in Q$;

2) $\bar{\psi}(\alpha, q)$ — состояние $q' \in Q$, в которое автомат $\mathcal{A}$ переходит при преобразовании слова $\alpha \in A^*$ из состояния $q \in Q$.

Эксперименты с конечными автоматами

Экспериментом для конечного автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ называется произвольное слово $\alpha \in A^*$.

Слово $\alpha \in A^*$ **отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$, если

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

В обратном случае слово $\alpha \in A^*$ **не отличает** состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$.

Отличимые и неотличимые состояния

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ — конечный автомат.

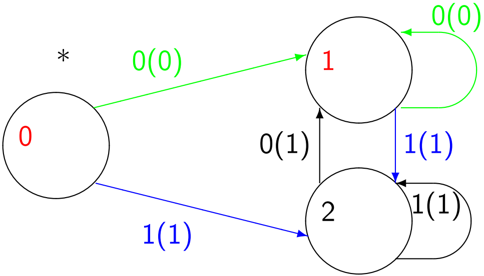
Два состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **отличимыми**, если найдется слово $\alpha \in A^*$, которое их отличает, т. е.

$$\bar{\varphi}(\alpha, q') \neq \bar{\varphi}(\alpha, q'').$$

В обратном случае состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ называются **неотличимыми**, или **эквивалентными**.

Отличимые и неотличимые состояния

Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



Состояния 0 и 1 — не отличимы.

Лемма об отличимых состояниях

Лемма 18.1. *Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ — конечный автомат без начального состояния и состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ отличимы каким-то словом длины m и не отличимы никаким словом меньшей длины. Тогда для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, найдутся состояния $q'_k \in Q$ и $q''_k \in Q$, которые отличимы каким-то словом длины k и не отличимы никаким словом меньшей длины.*

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ — конечный автомат и состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ отличимы словом $\alpha \in A^*$ длины m и не отличимы никаким словом меньшей длины.

Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, определим состояния q'_k, q''_k:

$$q'_k = \bar{\psi}(\alpha(1)\ldots\alpha(m-k), q') \in Q,$$
$$q''_k = \bar{\psi}(\alpha(1)\ldots\alpha(m-k), q'') \in Q.$$

1. Состояния q'_k и q''_k отличимы словом

$$\alpha_k = \alpha(m-k+1)\ldots\alpha(m)$$

длины k.

Лемма об отличимых состояниях

Доказательство. 2. Докажем от обратного, что состояния q'_k и q''_k не отличимы никаким словом меньшей длины.

Пусть найдется слово $\alpha_0 \in A^*$ длины $k_0 < k$, отличающее состояния q'_k и q''_k.

Но тогда состояния q' и q'' отличимы словом

$$\alpha_1 = \alpha(1) \ldots \alpha(m-k)\alpha_0$$

длины $(m-k) + k_0 < m$, что противоречит условию.

Следовательно, состояния q'_k и q''_k не отличимы никаким словом длины, меньшей k.

$\square$

Теорема Мура

Теорема 18.1 (Мура). *Пусть* $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ *— конечный автомат с* r *состояниями* ($|Q| = r$)*. Если состояния* $q' \in Q$ *и* $q'' \in Q$ *отличимы, то они отличимы некоторым словом длины, не большей* $(r - 1)$.

Теорема Мура

Доказательство. Пусть $Q = \{q_1, \ldots, q_r\}$.

Для каждого k, $k = 0, 1, \ldots$, рассмотрим следующее отношение R_k на множестве Q:

для $q_i, q_j \in Q$ верно $q_i R_k q_j$, если состояния q_i и q_j не отличимы никаким словом длины, меньшей или равной k.

Полагаем, что $q_i R_0 q_j$ для всех $q_i, q_j \in Q$.

Теорема Мура

Доказательство.
Докажем, что для каждого k, $k = 0, 1, \ldots,$ R_k — отношение эквивалентности на Q.

1. Рефлексивность: qR_kq для каждого состояния $q \in Q$.

2. Симметричность: если $q_iR_kq_j$, то $q_jR_kq_i$.

3. Транзитивность: пусть $q_iR_kq_j$ и $q_jR_kq_s$, т. е. для каждого такого $\alpha \in A^*$, что $|\alpha| \leqslant k$, верно

$$\bar{\varphi}(\alpha, q_i) = \bar{\varphi}(\alpha, q_j),$$
$$\bar{\varphi}(\alpha, q_j) = \bar{\varphi}(\alpha, q_s).$$

Тогда для каждого такого $\alpha \in A^*$, что $|\alpha| \leqslant k$, верно и $\bar{\varphi}(\alpha, q_i) = \bar{\varphi}(\alpha, q_s)$, т. е. $q_iR_kq_s$.

Следовательно, R_k — отношение эквивалентности на Q.

Теорема Мура

Доказательство.
Пусть $r_k = |Q/R_k|$ — число классов эквивалентности по отношению R_k на множестве Q.

Заметим, что $r_0 = 1$.

По условию состояния $q' \in Q$ и $q'' \in Q$ — отличимы.

Пусть $\alpha \in A^*$ — слово наименьшей длины, отличающее состояния q' и q''. Пусть $|\alpha| = m$.

Т. е. состояния q' и q'' отличимы некоторым словом длины m и не отличимы никаким словом меньшей длины.

По лемме для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, найдутся состояния $q'_k \in Q$ и $q''_k \in Q$, которые отличимы каким-то словом длины k и не отличимы никаким словом меньшей длины.

Теорема Мура

Доказательство.
Посмотрим, как устроены фактор-множества Q/R_{k-1} и Q/R_k и как соотносятся между собой числа r_{k-1} и r_k при $1 \leqslant k \leqslant m$.

Заметим, что если $q_i \bar{R}_{k-1} q_j$, то $q_i \bar{R}_k q_j$.

Т. е. если состояния q_i и q_j отличимы каким-то словом длины, не большей $(k-1)$, то состояния q_i и q_j отличимы и каким-то словом длины, не большей k.

Поэтому $r_{k-1} \leqslant r_k$.

Теорема Мура

Доказательство.
Рассмотрим состояния q'_k и q''_k. Они не отличимы никаким словом длины, меньшей k.

Значит, по отношению R_{k-1} они находятся в одном классе эквивалентности.

Но они отличимы каким-то словом длины k.

Значит, по отношению R_k они находятся в разных классах эквивалентности.

Следовательно, при переходе от фактор-множества Q/R_{k-1} к фактор-множеству Q/R_k хотя бы один класс эквивалентности по отношению R_{k-1} разбивается хотя бы на два класса эквивалентности по отношению R_k.

Поэтому $r_{k-1} < r_k$.

Теорема Мура

Доказательство.
Отметим, что т. к. $|Q| = r$, для всех k верно $r_k \leqslant r$ (т. к. в каждом классе эквивалентности не менее одного состояния).

Получаем возрастающую последовательности чисел:

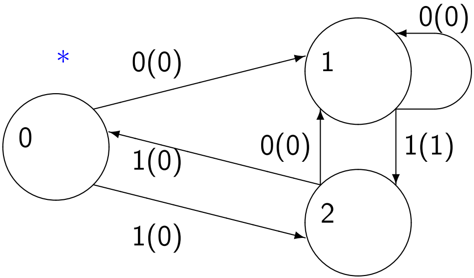
$$1 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_m \leqslant r.$$

Следовательно, $m \leqslant r - 1$.

$\square$

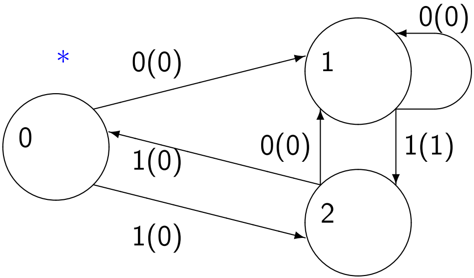
Упрощение автоматов

Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



Упрощение автоматов

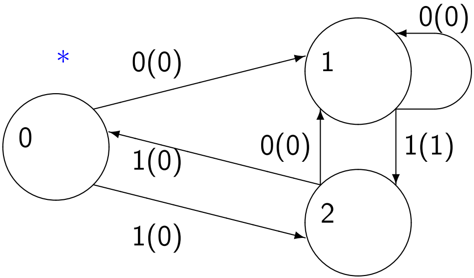
Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$

Упрощение автоматов

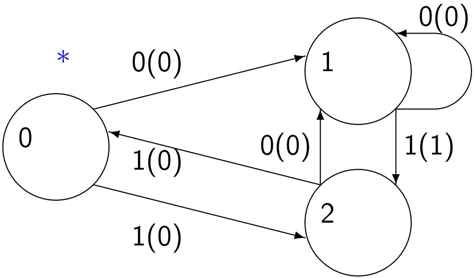
Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00

Упрощение автоматов

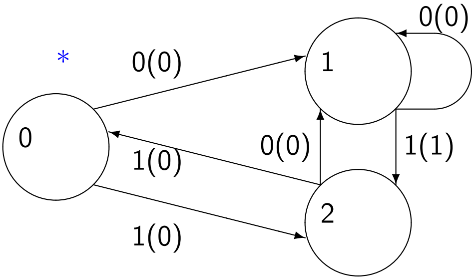
Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00
01	01	01	01

Упрощение автоматов

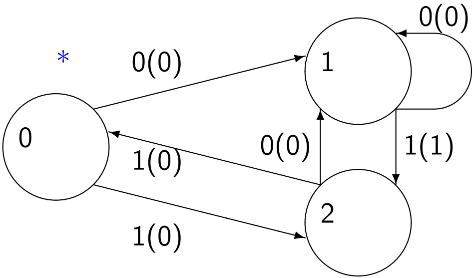
Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00
01	01	01	01
10	00	10	00

Упрощение автоматов

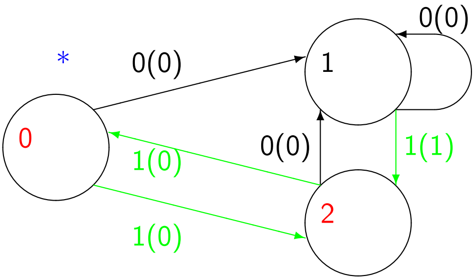
Пример. Рассмотрим диаграмму Мура автоматной функции f:



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00
01	01	01	01
10	00	10	00
11	00	10	00

Упрощение автоматов

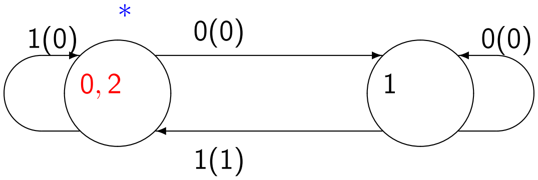
Пример (продолжение).



α	$\bar{\varphi}(\alpha, 0)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 1)$	$\bar{\varphi}(\alpha, 2)$
00	00	00	00
01	01	01	01
10	00	10	00
11	00	10	00

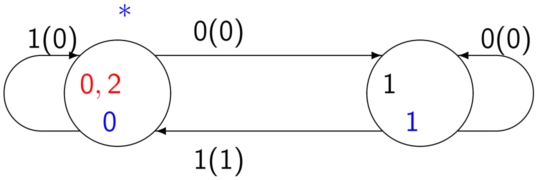
Упрощение автоматов

Пример (продолжение). Упростим диаграмму Мура функции f, отождествив неотличимые состояния 0 и 2:



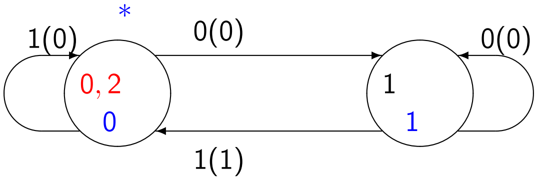
Упрощение автоматов

Пример (продолжение). Упростим диаграмму Мура функции f, отождествив неотличимые состояния 0 и 2:



Упрощение автоматов

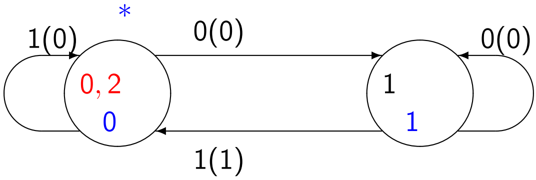
Пример (продолжение). Упростим диаграмму Мура функции f, отождествив неотличимые состояния 0 и 2:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Упрощение автоматов

Пример (продолжение). Упростим диаграмму Мура функции f, отождествив неотличимые состояния 0 и 2:



$q(t-1)$	$x(t)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

$$\begin{cases} y(t) = x(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = \bar{x}(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Достижимые и недостижимые состояния

Пусть $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi, q_*)$ — конечный автомат (с начальным состоянием).

Состояние $q \in Q$ называется **достижимым**, если найдется такое слово $\alpha \in A^*$, что $\bar{\psi}(\alpha, q_*) = q$.

Т. е. состояние достижимо, если автомат из начального состояния может в него перейти по некоторому слову.

В обратном случае состояние $q \in Q$ называется **недостижимым**.

Понятно, что все недостижимые состояния можно убрать из множества состояний Q автомата $\mathcal{A}$, никак не изменив отображение $f_{\mathcal{A}}$.

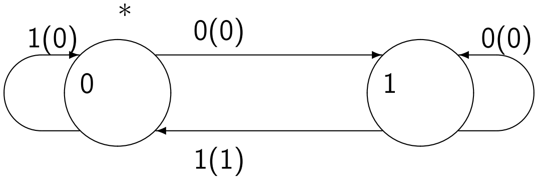
Приведенный конечный автомат

Конечный автомат называется **приведенным**, если он не содержит **недостижимых** и **неотличимых** состояний.

Диаграмма Мура приведенного конечного автомата называется **приведенной**.

Приведенный конечный автомат

Пример. Следующая диаграмма Мура является приведенной:



Задачи для самостоятельного решения

1. Для каждого $r \geqslant 2$ приведите пример конечного автомата $\mathcal{A} = (A, B, Q, \varphi, \psi)$ с r состояниями ($|Q| = r$), в котором найдутся два состояния, которые отличимы словом длины $(r-1)$, но не отличимы никаким словом меньшей длины.

Литература к лекции

1. Алексеев В. Б. Лекции по дискретной математике. М.: Инфра-М, 2012. С. 83–87.

2. Марченков С. С. Конечные автоматы. М.: Физматлит, 2008. С. 36–48.

3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. Гл. IV 2.2, 2.4.