Лекция 4. Существенные функции. Три леммы о существенных функциях. Критерий полноты Яблонского. Критерий полноты Слупецкого. Шефферовы функции.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Существенная функция

Пусть $k \geqslant 3$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется **существенной**, если она *существенно* зависит не менее чем от двух переменных.

Примеры: $x + y, x \cdot y, \max(x, y) \in P_k$.

Лемма о трех наборах

Лемма 1 (о трех наборах). *Пусть* $k \geqslant 3$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ — *существенная функция, принимающая* l, $l \geqslant 3$, *значений, причем* x_1 *и* x_2 — *ее существенные переменные. Тогда найдутся 3 набора*

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \beta &= (b_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \gamma &= (a_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in E_k^n, \end{aligned}$$

на которых функция f *принимает три различных значения.*

Лемма о трех наборах

Доказательство. Т. к. x_1 — существенная переменная функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, найдутся такие $a_2, \ldots, a_n \in E_k$, что множество

$$E = \{f(0, a_2, \ldots, a_n), f(1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, f(k-1, a_2, \ldots, a_n)\} \subseteq E_k$$

содержит не менее двух различных элементов.

Лемма о трех наборах

Возможны два случая.

1. Пусть E содержит **не все** различные значения функции f.

Т. е. найдется такой набор $\gamma = (a_1, c_2, \ldots, c_n) \in E_k^n$, что $f(\gamma) \notin E$. Тогда положим $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$.

Выберем такой $b_1 \in E_k$, что для $\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$ верно $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Такой b_1 всегда можно найти.

Наборы α, β, γ — искомые.

Лемма о трех наборах

2. Пусть E содержит **все** различные значения функции f.

Т. к. x_2 — существенная переменная функции f, найдутся такие $a_1, c_3, \ldots, c_n \in E_k$, что

$$f(a_1, x_2, c_3, \ldots, c_n) \neq Const.$$

Т. е. найдется такой $c_2 \in E_k$, что для

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \in E_k^n \text{ и } \gamma = (a_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \in E_k^n$$

верно $f(\alpha) \neq f(\gamma)$.

Тогда выберем такой $b_1 \in E_k$, что для $\beta = (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n$ верно

$$f(\alpha) \neq f(\beta) \text{ и } f(\gamma) \neq f(\beta).$$

Такой b_1 всегда можно найти.

Наборы α, β, γ — искомые.

Лемма о трех наборах

Пример. Рассмотрим существенную функцию $f(x, y) = x + y \in P_5$, принимающую 5 различных значений.

Искомые наборы, например, следующие:

$$\begin{aligned} \alpha &= (0, 0), \\ \beta &= (1, 0), \\ \gamma &= (0, 2). \end{aligned}$$

Проверим:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0, \\ f(\beta) &= 1, \\ f(\gamma) &= 2. \end{aligned}$$

Основная лемма

Лемма 2 (основная). *Пусть* $k \geqslant 3$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ — *существенная функция, принимающая* l, $l \geqslant 3$, *значений. Тогда найдутся такие множества* G_i, $G_i \subseteq E_k$, $i = 1, \dots, n$, *что*
1) $|G_i| \leqslant l - 1$ *для каждого* $i = 1, \dots, n$;
2) *на множестве* $G_1 \times \dots \times G_n \subseteq E_k^n$ *функция* f *принимает все* l *своих различных значений.*

Основная лемма

Доказательство. Пусть (без ограничения общности рассуждений) x_1 и x_2 — существенные переменные функции f. Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n, \\ \beta &= (b_1, a_2, \dots, a_n) \in E_k^n, \\ \gamma &= (a_1, c_2, \dots, c_n) \in E_k^n, \end{aligned}$$

на которых функция f принимает три различные значения $u_1, u_2, u_3 \in E_k$.

Пусть на наборах $\delta^{(j)} = (d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_n^{(j)}) \in E_k^n$, $j = 4, \dots, l$, функция f принимет оставшиеся $(l-3)$ различные значения $u_4, \dots, u_l \in E_k$.

Основная лемма

Тогда:

	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
α	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n	u_1
β	b_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_n	u_2
γ	a_1	c_2	c_3	$\ldots$	c_n	u_3
$\delta^{(4)}$	$d_1^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$\ldots$	$d_n^{(4)}$	u_4
$\ldots$				$\ldots$		$\ldots$
$\delta^{(l)}$	$d_1^{(l)}$	$d_2^{(l)}$	$d_3^{(l)}$	$\ldots$	$d_n^{(l)}$	u_l
	G_1	G_2	G_3	$\ldots$	G_n	

Т. е. множество G_i состоит из элементов столбца для переменной x_i, $i = 1,\ldots,n$.
Множества $G_1,\ldots,G_n$ — искомые.

$\square$

Основная лемма

Пример. Рассмотрим существенную функцию
$f(x, y) = x + y \in P_5$, принимающую 5 различных значений.

На наборах

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (0, 0), \\ \alpha_1 &= (1, 0), \\ \alpha_2 &= (0, 2), \\ \alpha_3 &= (0, 3), \\ \alpha_4 &= (0, 4), \end{aligned}$$

функция f принимает 5 различных значений.

Квадрат

Множество $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subseteq E_k^n$ назовем **квадратом**, если

$$\begin{array}{lcl}
\alpha & = & (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n), \\
\beta & = & (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n), \\
\gamma & = & (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n), \\
\delta & = & (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n),
\end{array}$$

где $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Лемма о квадрате

Лемма 3 (о квадрате). *Пусть $k \geqslant 3$, $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ — существенная функция, принимающая l, $l \geqslant 3$, значений. Тогда найдется такой квадрат, что значение функции f каком-то его наборе отлично от значения функции f на любом другом его наборе.*

Лемма о квадрате

Доказательство. Пусть (без ограничения общности рассуждений) x_1 и x_2 — существенные переменные функции f. Тогда по лемме 1 найдутся наборы

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \beta &= (b_1, a_2, \ldots, a_n) \in E_k^n, \\ \gamma &= (a_1, c_2, \ldots, c_n) \in E_k^n, \end{aligned}$$

на которых функция f принимает три различные значения $u, v, w \in E_k$.

Лемма о квадрате

Рассмотрим последовательность квадратов:

Наборы		Значения f на них
$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$,	$(b_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$,	$(b_1, c_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, c_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$,	$(b_1, c_2, c_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(a_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, a_n)$,	$(b_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, a_n)$	$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$
$(a_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n)$,	$(b_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n)$	$\{\mathbf{w}, ?\}$

Если искомый квадрат не был получен ранее, он обязательно появится на заключительном шаге.

$\square$

Лемма о квадрате

Пример. Рассмотрим существенную функцию $f(x, y) = x + y \in P_3$, принимающую 3 различных значения.

На квадрате

$$Q = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,2)\} \subseteq E_3^2$$

функция f принимает значение 1 только на наборе $(1,0)$.

Критерий полноты Яблонского

Теорема 1 (С.В. Яблонского) *Пусть* $k \geqslant 3$, $A \subseteq P_k$ *и множество* A *содержит все функции одной переменной, принимающие не более* $(k-1)$ *значений. Множество* A *является полной системой в* P_k *тогда и только тогда, когда оно содержит существенную функцию, принимающую все* k *значений.*

Критерий полноты Яблонского

Доказательство. 1. *Необходимость*. Пусть A — полная система.

1) Если A не содержит существенную функцию, то формулами над A не получить никакую функцию с более одной существенной переменной.

2) Если существенные функции из A принимают не все k значений, то формулами над A не получить никакую функцию, принимающую все k значений.

Необходимость обоснована.

Критерий полноты Яблонского

2. *Достаточность*. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in A$ — существенная функция, принимающая k значений.

Докажем, что любую функцию из P_k можно выразить формулой над A.

Доказательство проведем индукцией по числу l, $l \leqslant k$, значений, которые принимают функции из P_k.

Критерий полноты Яблонского

1) *Базис индукции*: $l = 2$. Пусть $g(y_1, \ldots, y_m) \in P_k$ и g принимает 2 значения.

1.1) Пусть g принимает значения $0, 1 \in E_k$.

По лемме о квадрате для существенной функции f найдется такой квадрат $Q = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \subseteq E_k^n$, где

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n),\\
\alpha_2 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{b_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n),\\
\alpha_3 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{b_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n),\\
\alpha_4 &= (a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{c_i}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, \mathbf{c_j}, a_{j+1}, \ldots, a_n),
\end{aligned}
$$

что значение f на некотором наборе из Q, отличается от значения f на любом другом наборе из Q.

Пусть $f(\alpha_1) = u$ и $f(\alpha_2) \neq u$, $f(\alpha_3) \neq u$, $f(\alpha_4) \neq u$.

Критерий полноты Яблонского

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Множество A содержит все константы, поэтому $\varphi \in [A]$.

Кроме того,

$$\begin{array}{ll} \varphi(b_i, b_j) = u, & \varphi(b_i, c_j) \neq u, \\ \varphi(c_i, b_j) \neq u, & \varphi(c_i, c_j) \neq u, \end{array}$$

Критерий полноты Яблонского

Рассмотрим функции

$$\psi_1(z) = \begin{cases} b_i, & z = 0, \\ c_i, & z = 1, \end{cases} ; \ \psi_2(z) = \begin{cases} b_j, & z = 0, \\ c_j, & z = 1, \end{cases}$$

и

$$\psi_0(z) = \begin{cases} 0, & z = u, \\ 1, & z \neq u. \end{cases}$$

Отметим, что $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \in A$.

Тогда можно рассмотреть функцию:

$$\max^{0,1}(x, y) = \psi_0(\varphi(\psi_1(x), \psi_2(y))) \in [A].$$

Критерий полноты Яблонского

Покажем, что $\max^{0,1}$ выражает максимум из $0, 1$.

Итак,

$$\max^{0,1}(x,y) = \psi_0(\varphi(\psi_1(x), \psi_2(y))).$$

Если $b \in E_2$, то

$$\begin{aligned} 1 = \max^{0,1}(1,b) &= \psi_0(\varphi(\psi_1(1), \psi_2(b))) = \\ &= \psi_0(\varphi(c_i, \psi_2(b)) = \psi_0(\neq u) = 1. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 0 = \max^{0,1}(0,0) &= \psi_0(\varphi(\psi_1(0), \psi_2(0))) = \\ &= \psi_0(\varphi(b_i, b_j)) = \psi_0(u) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно построить функцию $\min^{0,1}(x,y) \in [A]$, которая выражает минимум из $0, 1$.

Критерий полноты Яблонского

Далее $j_i(z) \in A$, где $i \in E_k$.

Тогда аналогично 1-й форме получаем:

$$g(y_1, \ldots, y_m) = \max_{\sigma \in E_k^m}{}^{0,1} \min{}^{0,1}(j_{\sigma_1}(x_1), \ldots, j_{\sigma_m}(x_m), g(\sigma)).$$

Значит, $g \in [A]$.

Критерий полноты Яблонского

1.2) Пусть теперь g принимает значения $s, t \in E_k$, где $s < t$.

Рассмотрим такую функцию $h(y_1, \ldots, y_m) \in P_k$, принимающую 2 значения $0, 1 \in P_k$, что для любого набора $\beta \in E_k^m$ верно: $g(\beta) = s$ тогда и только тогда, когда $h(\beta) = 0$.

По доказанному выше $h \in [A]$.

Кроме того, $\psi_{s,t}(z) \in A$, где

$$\psi_{s,t}(z) = \begin{cases} s, & z = 0, \\ t, & z \neq 0. \end{cases}$$

Теперь

$$g(y_1, \ldots, y_m) = \psi_{s,t}(h(y_1, \ldots, y_m)),$$

а значит, $g \in [A]$.

Базис индукции полностью обоснован.

Критерий полноты Яблонского

2) *Индуктивный переход*. Пусть любая функция из P_k, принимающая не более $(l-1)$ значений, может быть выражена формулой над A.

Рассмотрим функцию $g(y_1, \ldots, y_m) \in P_k$, принимающую ровно l значений: $s_1, \ldots, s_l \in P_k$.

Критерий полноты Яблонского

По основной лемме для существенной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающей l значений, найдутся такие множества G_i, что

а) $|G_i| \leqslant l - 1$, $i = 1, \ldots, n$;

б) на множестве $G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает l различных значений.

При $l < k$ если необходимо, то подходящей функцией $\psi(z) \in A$ переведем эти значения в $s_1, \ldots, s_l$.

Критерий полноты Яблонского

Пусть

$$f(a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}) = s_j,\ j = 1, \ldots, l,$$

где $(a_1^{(j)}, \ldots, a_n^{(j)}) \in G_1 \times \ldots \times G_n$.

Рассмотрим такие функции $\psi_i(y_1, \ldots, y_m) \in P_k$, $i = 1, \ldots, n$, что для любого набора $\beta \in E_k^m$ верно:

$$\psi_i(\beta) = a_i^{(j)}$$

тогда и только тогда, когда

$$g(\beta) = s_j.$$

По построению функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ принимают не более $(l-1)$ различных значений. Поэтому по предположению индукции $\psi_1, \ldots, \psi_n \in [A]$.

Критерий полноты Яблонского

Далее получаем:

$$g(y_1, \dots, y_m) = f(\psi_1(y_1, \dots, y_m), \dots, \psi_n(y_1, \dots, y_m)).$$

Действительно, если $\beta \in E_k^m$ и $g(\beta) = s_j$, то

$$s_j = g(\beta) = f(\psi_1(\beta), \dots, \psi_n(\beta)) = f(a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)}) = s_j.$$

Значит, $g \in [A]$.

Индуктивный переход обоснован.

$\square$

Критерий полноты Слупецкого

Теорема 2 (Е. Слупецкого). *Пусть* $k \geqslant 3$, $A \subseteq P_k$ *и множество* A *содержит все функции одной переменной. Множество* A *является полной системой в* P_k *тогда и только тогда, когда оно содержит существенную функцию, принимающую все* k *значений.*

Верен ли критерий полноты в P_2?

Верны ли эти критерии полноты в P_2?
Нет. Рассмотрим множество

$$A = \{0, 1, x, \bar{x}, x \oplus y\} \subseteq P_2.$$

Множество A содержит все функции одной переменной и существенную функцию $x \oplus y$, принимающую два значения. Но A не является полной системой в P_2, так как $A \subseteq L$.

Полнота системы $\{j_0(x), x+y\}$ в P_k при $k \geqslant 3$

Пример. Докажем по критерию, что $A = \{j_0(x), x+y\}$ — полная система в P_k при $k \geqslant 3$.

1. Покажем, что из A можно получить все функции одной переменной.
Действительно, $\underbrace{x+\ldots+x}_{k} = 0$, $j_0(0) = 1$, $1+1=2$, $2+1=3$ и т. д. — все константы построены.
Теперь $x - a = x + (k-a)$, где $a \in E_k$, и $j_a(x) = j_0(x-a)$.
Тогда запишем произвольную функцию $f(x) \in P_k^{(1)}$ во 2-й форме и получим:

$$f(x) = \sum_{a \in E_k} f(a) j_a(x) = \sum_{a \in E_k} \underbrace{j_a(x) + \ldots + j_a(x)}_{f(a)}.$$

Все функции одной переменной получены.

Полнота системы $\{j_0(x), x+y\}$ в P_k при $k \geqslant 3$

Пример (продолжение).

2. Теперь заметим, что $x+y \in A$ — существенная функция, принимающая все k значений.
Значит, $A = \{j_0(x), x+y\}$ — полная система в P_k при $k \geqslant 3$.

При $k=2$ система $\{j_0(x) = \bar{x}, x+y = x \oplus y\} \subseteq L$ — неполна.

Распознавание полноты в P_k

По критериям Слупецкого и Яблонского можно упростить **алгоритм распознавания полноты в** P_k.

Пусть задано конечное множество $A = \{f_1, \ldots, f_t\} \subseteq P_k$.

1. Строим $[A]^{(1)} \subseteq P_k^{(1)}$.

2. Если $[A]^{(1)} \neq P_k^{(1)}$, то A — не полная система, т. к. $[A]$ содержит не все функции одной переменной.

3. Пусть $[A]^{(1)} = P_k^{(1)}$. Тогда система A полна или не полна в зависимости от того, содержит A или нет существенную функцию, принимающую все k значений, в силу критериев.

Шефферова функция

Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется **шефферовой**, если $[\{f\}] = P_k$.

Примеры: штрих Шеффера $x/y \in P_2$, стрелка Пирса $x \downarrow y \in P_2$, функция Вебба $V_k(x, y) \in P_k$.

Шефферовы функции

Теорема 3 (критерий шефферовости функции). *Пусть $k \geqslant 3$ и $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$. Функция f является шефферовой в P_k тогда и только тогда, когда формулами над ней можно выразить все функции одной переменной, принимающие не более $(k-1)$ значения.*

Доказательство. 1. *Необходимость* очевидна.

Шефферовы функции

2. Докажем *достаточность*.

1) Если функция f не принимает какое-то значение $u \in E_k$, то из нее нельзя получить константу u — противоречие. Значит, функция f принимает все k значений.

2) Если функция f не является существенной, то по п. 1) она — перестановка, и из нее можно получить только перестановки — противоречие. Значит, функция f — существенная.

Тогда по критерию полноты Яблонского система $A = \{f\}$ — полна в P_k.

$\square$

Верен ли критерий шефферовости функции в P_2?

Верен ли этот критерий шефферовости функции в P_2?

Верен ли критерий шефферовости функции в P_2?

Да. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$ и из f формулами можно выразить константы 0 и 1. Проверим, что $f \notin T_0, T_1, L, S, M$.

Получаем:
1) $f \notin T_0$, т. к. из нее формулами можно получить $1 \notin T_0$, а T_0 — замкнутый класс;
2) $f \notin T_1$, т. к. из нее формулами можно получить $0 \notin T_1$, а T_1 — замкнутый класс;
3) $f \notin S$, т. к. из нее формулами можно получить $0 \notin S$, а S — замкнутый класс;
4) $f \notin M$, т. к. $f \notin T_0$, $f \notin T_1$;
5) $f \notin L$, т. к. если предположить, что $f \in L$, то из $f \notin T_0$ и $f \notin T_1$ будет следовать $f \in S$, что противоречит $f \notin S$.

Значит, по теореме Поста система $\{f\}$ — полна в P_2, т. е. f — шефферова функция.

Литература к лекции

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. Ч. I, гл. 2, стр. 56–65.