Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 8

Метод семантичесских таблиц:
семантические таблицы

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Вступление

Чтобы избежать проблем, возникших при попытке адаптировать переборный метод проверки общезначимости формул, попробуем предложить другой метод решения этой задачи, опирающийся **только** на логическую (индуктивную) семантику связок

Начнём с примера (ООФП): попробуем обосновать *от противного* общезначимость формулы $\forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$

1. Предположим, что $\not\models \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$
2. Тогда существует интерпретация $\mathcal{I}$, такая что $\mathcal{I} \not\models \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$
3. Из $\mathcal{I} \not\models \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$ и семантики $\to$ следует $\mathcal{I} \models \forall x\, P(x)$ и $\mathcal{I} \not\models P(\mathbf{c})$
4. Из $\mathcal{I} \models \forall x\, P(x)$ и семантики $\forall$ следует $\mathcal{I} \models P(\mathbf{c})$
5. Получены соотношения $\mathcal{I} \not\models P(\mathbf{c})$ и $\mathcal{I} \models P(\mathbf{c})$ — такого быть не может, а значит, исходное предположение неверно ▼

Попробуем систематизировать ход таких рассуждений и избавиться от лишних слов в доказательстве

Определения

Семантическая таблица (*логики предикатов*) — это упорядоченная пара множеств формул (*логики предикатов*)

Будем называть два множества семантической таблицы её левой частью (первое) и правой частью (второе)

Будем записывать семантическую таблицу так:
$\langle \Gamma \mid \Delta \rangle$, где Γ — левая часть и Δ — правая часть

В записи множеств в семантических таблицах иногда будем опускать фигурные скобки и писать «,» вместо «$\cup$»

Например, $\langle \mathrm{P}(\mathbf{c}), \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \mid \exists \mathrm{x}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rangle$ — это семантическая таблица с левой частью $\{\mathrm{P}(\mathbf{c}), \mathrm{Q}(\mathrm{x})\}$ и правой частью $\{\exists \mathrm{x}\, \mathrm{Q}(\mathrm{x})\}$

Содержательно (согласно ООФП), формулу φ в левой части таблицы можно понимать как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \models \varphi$, а в правой — как отвечающую соотношению $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Определения

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Например,

- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathbf{c}), \underline{\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Q}(\mathrm{x})} \mid \underline{\forall \mathrm{x}\ \mathrm{Q}(\mathrm{x})}, \mathrm{R}(\mathbf{c}) \rangle$ закрыта
- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{y}), \mathrm{Q}(\mathrm{x}) \rangle$ незакрыта

Содержательно (согласно ООФП), если $\varphi \in \Gamma \cap \Delta$, то это означает, что получено *явное противоречие*: соотношения $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \varphi$

Таблица T атомарна, если все формулы из $\Gamma \cup \Delta$ атомарны

Например,

- таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ атомарна
- таблицы $\langle \underline{\forall \mathrm{x}\ } \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ и $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \underline{\vee} \mathrm{P}(\mathbf{d}) \rangle$ неатомарны

Содержательно (согласно ООФП), атомарная таблица отвечает «окончательному» набору соотношений вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$, из которого невозможно извлечь другие аналогичные соотношения, существенные для ООФП

Определения

Пусть $\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}$ — все свободные переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица $T = \langle \Gamma \mid \Delta \rangle$ выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы φ из Γ и
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы ψ из Δ

Например:

- Таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$ выполнима (*и незакрыта, и атомарна*)
  - Подходящая интерпретация: $\mathrm{D} = \{d\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{Q}}(d, d) = \mathbb{f}$
- Таблица $\langle \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathrm{x}) \rangle$ невыполнима (*и закрыта, и атомарна*)
- Таблица $\langle \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \mid \neg \exists \mathrm{x}\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$ невыполнима (*и незакрыта, и неатомарна*)
- Таблица $\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \rangle$ выполнима (*и незакрыта, и неатомарна*)
  - Подходящая интерпретация: $\mathrm{D} = \{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbb{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbb{f}$

Содержательно (согласно ООФП), выполнимость таблицы означает, что в имеющихся соотношениях вида $\mathcal{I} \models \varphi$ и $\mathcal{I} \not\models \psi$ нет противоречия

Основные утверждения

Теорема (о табличной проверке общезначимости)
Для любой формулы φ справедлива равносильность

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \textbf{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}})[\widetilde{d}^{n}] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$
$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d}^{n}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{таблица } \langle \mid \varphi \rangle \text{ невыполнима} \ \blacktriangledown$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение. **Любая незакрытая атомарная таблица выполнима**

Доказательство (утверждений). Можете попробовать сами