

Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 2

Логика высказываний:
синтаксис, семантика,
выполнимость, общезначимость

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно **интерпретировать** как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

А

Можно ли сказать, что это “простое высказывание”?

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

→

Здесь есть причинно-следственная связь ...

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$A \rightarrow B$

... между двумя простыми высказываниями

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

A одно из высказываний можно сделать ещё проще

Логика высказываний: вступление

В языке логики высказываний содержатся средства записи

- ▶ “простых” высказываний, которые можно интерпретировать как истинные или ложные, и
- ▶ “булевых” причинно-следственных связей между этими высказываниями

Для примера посмотрим внимательно на такое предложение:

Если будете прогуливать лекции,

то ничего хорошего из этого не выйдет

$$A \rightarrow \neg B$$

Логика высказываний: вступление

После формализации высказывания получилось что-то очень похожее на **формулу булевой алгебры**, но не совсем:

Какой смысл имеет построенное высказывание?

Булева алгебра:

значение формулы — это булева функция:

A	B	$A \rightarrow \neg B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Логика высказываний: ?

Для языка логики высказываний будут описаны

алфавит: набор символов, используемых в языке

синтаксис: правила, по которым из символов строятся высказывания языка (**формулы**)

семантика: значение этих высказываний

После этого будут строго сформулированы основные логические свойства формул:

выполнимость,

невыполнимость,

общезначимость

Логика высказываний: алфавит

Алфавит логики высказываний состоит из следующих символов:

1. Пропозициональные переменные

- ▶ Будем считать, что в алфавите содержится *счётное* число таких переменных
- ▶ **Var** — множество всех пропозициональных переменных

2. Логические связки:

Конъюнкция	(логическое И):	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ):	\vee
Отрицание	(логическое НЕ):	\neg
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО):	\rightarrow

3. Скобки:

()

Синтаксис и БНФ

Синтаксис — составление, построение, порядок;¹
раздел грамматики — наука о
законах соединения слов и строения предложения²

Для задания синтаксиса в курсе будут использоваться
формы *Бэкуса-Наура* (БНФ):

что-то ::= запись1 | запись2 | ... | записьN,

Прочтение такой БНФ:

- ▶ *Запись1* — это *что-то*
- ▶ *Запись2* — это *что-то*
- ...
- ▶ *ЗаписьN* — это *что-то*
- ▶ Других способов записи *чего-то* нет

¹ *συνταξις* (древнегреческий)

² Ожегов. Толковый словарь

Логика высказываний: синтаксис

БНФ, определяющая синтаксис формул логики высказываний:

$$\varphi ::= x \mid (\varphi \& \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\neg \varphi),$$

где φ — **формула** и $x \in \text{Var}$

Формула вида x , $x \in \text{Var}$, называется **атомарной** (**атомом**),
а остальные формулы $((\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi))$ — **составными**

$\varphi = \psi$ — так в курсе будет обозначаться
посимвольное (синтаксическое) совпадение формул φ и ψ

Приоритет связок по убыванию: \neg , затем $\&$, затем \vee , затем \rightarrow

Скобки в записи формул можно опускать согласно приоритету связок,
а также согласно ассоциативности связок $\&$ и \vee :

$$A \& \neg B \& C \rightarrow D \vee E = ((A \& ((\neg B) \& C)) \rightarrow (D \vee E))$$

Логика высказываний: семантика

Семантика — значение, смысл¹

Основные логические значения, на которых основана семантика формул:

\mathfrak{t} — истина; \mathfrak{f} — ложь

Значение формулы однозначно определяется значениями её атомов

Значения атома задаётся **интерпретацией** — отображением

$$\mathcal{I} : \text{Var} \rightarrow \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$$

Значение $\mathcal{I}(\varphi)$ составной формулы φ в интерпретации \mathcal{I} задаётся так:

$$\mathcal{I}(\varphi \ \& \ \psi) = \mathfrak{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{t} \ \text{и} \ \mathcal{I}(\psi) = \mathfrak{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \vee \psi) = \mathfrak{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{t} \ \text{или} \ \mathcal{I}(\psi) = \mathfrak{t}$$

$$\mathcal{I}(\varphi \rightarrow \psi) = \mathfrak{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{f} \ \text{или} \ \mathcal{I}(\psi) = \mathfrak{t}$$

$$\mathcal{I}(\neg\varphi) = \mathfrak{t} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{f}$$

В логике принято использовать немного другие обозначения:

$$\mathcal{I} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{t} \quad (\text{формула } \varphi \text{ выполняется в } \mathcal{I})$$

$$\mathcal{I} \not\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(\varphi) = \mathfrak{f} \quad (\text{формула } \varphi \text{ не выполняется в } \mathcal{I})$$

¹ Ожегов, Шведова. Толковый словарь русского языка

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \text{f}, \mathcal{I}(B) = \text{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{t})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \text{f}, \mathcal{I}(B) = \text{f}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{f})$$

$$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{f}$: я прилежно хожу на лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{f}$: **из этого не выйдет ничего хорошего**

$\mathcal{I} \models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **прав**

Логика высказываний: семантика

Пример

$$\text{Var} = \{A, B, \dots\} \quad \varphi = A \rightarrow \neg B \quad \mathcal{I}(A) = \text{t}, \mathcal{I}(B) = \text{t}$$

Имеет место следующее:

$$\mathcal{I} \not\models \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(B) = \text{t})$$

$$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B \quad (\text{так как } \mathcal{I}(A) = \text{t} \text{ и } \mathcal{I}(\neg B) = \text{f})$$

Содержательное пояснение

Пусть A — высказывание “Я прогуливаю лекции”

B — высказывание “Из этого выйдет что-то хорошее”

Тогда \mathcal{I} — мир, в котором я живу:

$\mathcal{I}(A) = \text{t}$: я прогуливаю лекции

$\mathcal{I}(B) = \text{t}$: из этого выйдет что-то хорошее

$\mathcal{I} \not\models A \rightarrow \neg B$: тот, кто сказал

“Если я прогуливаю лекции,

то из этого не выйдет ничего хорошего”, **неправ**

Выполнимость и общезначимость

Основные свойства формул,
которые обычно исследуются в логике высказываний:

- ▶ Формула φ **выполнима** ($\models \varphi^1$), если существует интерпретация \mathcal{I} , такая что $\mathcal{I} \models \varphi$
- ▶ Формула φ **невыполнима** ($\not\models \varphi^1$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- ▶ Формула φ **общезначима** ($\vDash \varphi$), если для любой интерпретации \mathcal{I} верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Логика высказываний

Булева алгебра

φ выполнима \Leftrightarrow

φ выполнима

φ невыполнима \Leftrightarrow

φ — тождественный ноль

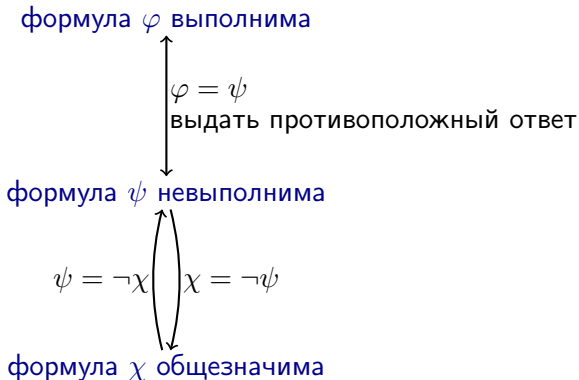
φ общезначима \Leftrightarrow

φ — тождественная единица

¹ Это необщепотребимое обозначение, используется **только** мной в слайдах по этому курсу

Выполнимость и общезначимость

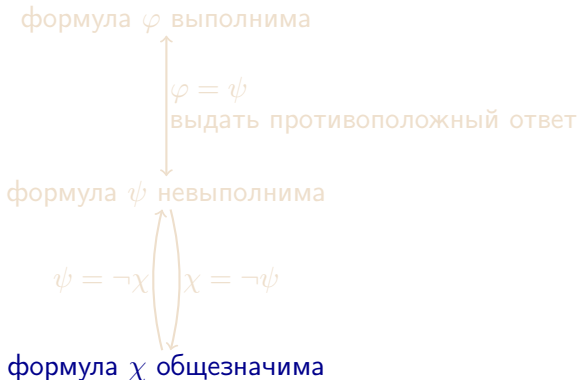
Выполнимость, невыполнимость и общезначимость — это “почти одно и то же”:



Проверка каждого из этих свойств может быть легко сведена к проверке каждого другого свойства

Выполнимость и общезначимость

Выполнимость, невыполнимость и общезначимость — это “почти одно и то же”:



Проверка каждого из этих свойств может быть легко сведена к проверке каждого другого свойства

Поэтому в логике нередко рассматривается только одно из этих свойств, и обычно это свойство **общезначимости**