Математическая логика и логическое программирование

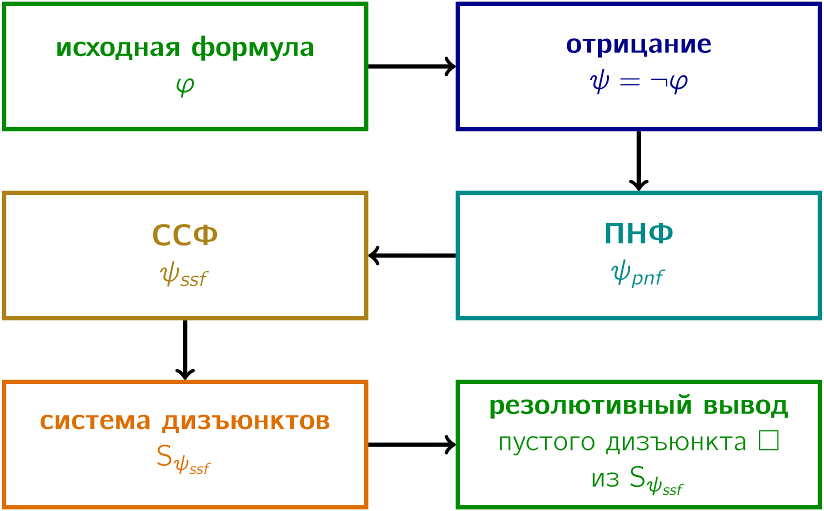
mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 18

Системы дизъюнктов

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь



$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

исходная формула
φ

отрицание
$\psi = \neg\varphi$

ПНФ
ψ_{pnf}

ССФ
ψ_{ssf}

система дизъюнктов
$S_{\psi_{ssf}}$

резолютивный вывод
пустого дизъюнкта $\square$
из $S_{\psi_{ssf}}$

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \not\models \psi_{ssf}$$

Системы дизъюнктов

Дизъюнктом называется ССФ с одним множителем в матрице:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k),$$

где L_i — литера (атом или его отрицание)

Для краткости иногда будем опускать
кванторную приставку дизъюнктов:

$$\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k) = \mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k$$

Для упрощения технических выкладок будем отождествлять между собой дизъюнкты, получающиеся друг из друга перестановкой слагаемых

В связи с таким упрощением будем
отождествлять дизъюнкт с мультимножеством его литер:

$$\mathsf{L}_1 \vee \dots \vee \mathsf{L}_k = \{\mathsf{L}_1, \dots, \mathsf{L}_k\}$$

Системы дизъюнктов

Например: (*но это* **только** *при обсуждении дизъюнктов*)

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})))$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))$$

$$=$$

$$\{\mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{P}(\mathrm{x}), \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c}))\}$$

$$=$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \lor \mathrm{P}(\mathrm{x})$$

$$=$$

$$\forall \mathrm{x}\ (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathrm{Q}(\mathbf{f}(\mathbf{c})) \lor \mathrm{P}(\mathrm{x}))$$

Пустой дизъюнкт $\square$ — это особый дизъюнкт, представляющий собой пустое множество литер

Пустой дизъюнкт будем считать **невыполнимым**:

$$\mathsf{L}_1 \lor \dots \lor \mathsf{L}_k \text{ «}\sim\text{» } \mathsf{L}_1 \lor \dots \lor \mathsf{L}_k \lor \mathbb{f}, \text{ а значит, } \square \text{ «}\sim\text{» } \mathbb{f}$$

Системой дизъюнктов будем называть (любое) множество дизъюнктов

Системы дизъюнктов

Утверждение. $\forall \mathrm{x}\,(\varphi \,\&\, \psi) \sim \forall \mathrm{x}\,\varphi \,\&\, \forall \mathrm{x}\,\psi$

Доказательство. Очевидно?

(*Обосновать эту равносильность настолько же просто,*
как и все основные равносильности)

Теорема (о переходе к дизъюнктам)
Для ССФ с любым набором множителей $\mathsf{D}_1, \ldots, \mathsf{D}_k$ **верно:**

$$|\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k) \quad \Leftrightarrow \quad |\!\models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_1, \ldots, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_k\}$$

Доказательство

По утверждению выше, $\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k) \sim \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_k$

Следовательно, с учётом семантики $\&$,
$|\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,(\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathsf{D}_k)$
$\Leftrightarrow |\!\models \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_k$
$\Leftrightarrow |\!\models \{\forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_1, \ldots, \forall \widetilde{\mathrm{x}}^{\mathrm{n}}\,\mathsf{D}_k\}$ ▼

Системы дизъюнктов

Пример:

$$\not\models \forall x\, \forall u\, (P(x) \,\&\, (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \,\&\, \neg R(x, u))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\not\models \{P(x), \qquad \neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x)), \qquad \neg R(x, u)\}$$