Лекция 9. Труднорешаемые графовые задачи распознавания. *NP*-полнота задачи *k*-раскраски графов при каждом заданном числе $k \geqslant 3$.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Лекции на сайте https://mk.cs.msu.ru

Задачи распознавания

Каждая **задача распознавания** определяется своими

1) **условием** (или **входом**) и

2) **вопросом**.

Задача k-раскраски графов

Задача k-**раскраски графов**.

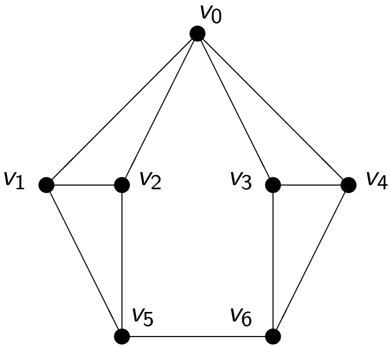
Вход: граф $G = (V, E)$, где V — конечное множество вершин и E — множество ребер, т. е. неупорядоченных пар различных вершин из V.

Вопрос: можно ли вершины графа G раскрасить в k цветов, т. е. найдется ли такое отображение $\rho : V \to \{0, 1, \dots, k-1\}$, что если $(v, w) \in E$, где $v, w \in V$, то $\rho(v) \neq \rho(w)$?

Задача 3-раскраски графов

Вход задачи 3-раскраски графов:

G :

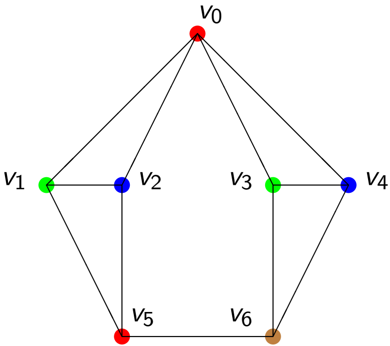


Можно проверить, что для графа G ответ «нет», т. е. G не является 3-**раскрашиваемым** графом.

Задача 4-раскраски графов

Вход задачи 4-раскраски графов:

G :



Несложно увидеть, что для графа G ответ «да», т. е. G является 4-**раскрашиваемым** графом.

Задача 3-раскраски графов

Задачу k-**раскраски графов** обозначим k-BP.

Теорема 1. *Задача 3-BP является NP-полной.*

Задача 3-раскраски графов

Доказательство. 1. Сначала покажем, что 3-$BP \in NP$.

Сертификат для 3-раскрашиваемого графа $G = (V, E)$ — такое отображение $\rho : V \to \{0, 1, 2\}$, что для каждого ребра $(v, w) \in E$ верно $\rho(v) \neq \rho(w)$.

Проверка сертификата — алгоритм, который получает граф $G = (V, E)$ и отображение $\rho : V \to \{0, 1, 2\}$, проверяет значения ρ на концах каждого ребра из E и выдает «да», если для каждого ребра они различны, и «нет», если найдется ребро, для которого они одинаковы.

Задача 3-раскраски графов

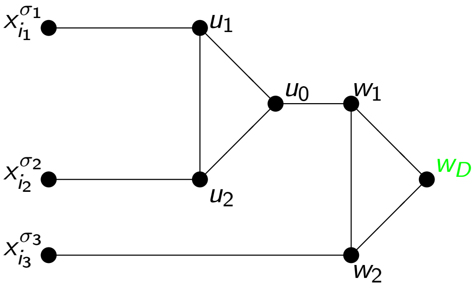
2. Теперь докажем, что 3-*ВР* является *NP*-трудной.

Для этого полиномиально сведем *NP*-полную задачу 3-*ВЫП* выполнимости 3-КНФ к задаче 3-*ВР*.

Задача 3-раскраски графов

Пусть $K(x_1, \ldots, x_n)$ — вход задачи 3-*ВЫП* и $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3}$ — произвольная ее элементарная дизъюнкция (ЭД), $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$.

ЭД D сопоставим граф G_D с множеством вершин $V_D = \{x_{i_1}^{\sigma_1}, x_{i_2}^{\sigma_2}, x_{i_3}^{\sigma_3}, u_0, u_1, u_2, w_1, w_2, w_D\}$:



Задача 3-раскраски графов

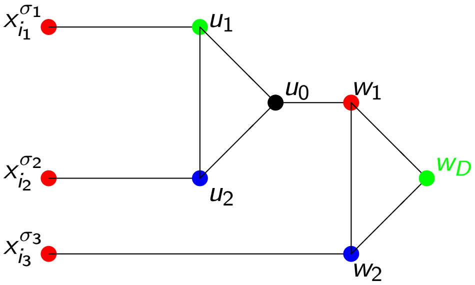
Подграф графа G_D с множеством вершин

$$V_H = \{u_0, u_1, u_2, w_1, w_2, w_D\}$$

и всеми ребрам, соединяющими эти вершины в G_D, обозначим H_D.

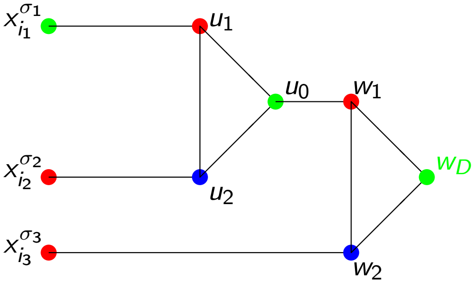
Задача 3-раскраски графов

Лемма 1. *Не существует такой раскраски* $\rho : V_D \to \{0, 1, 2\}$ *графа* G_D, *что* $\rho(x_{i_1}^{\sigma_1}) = \rho(x_{i_2}^{\sigma_2}) = \rho(x_{i_3}^{\sigma_3}) = 0$ *и* $\rho(w_D) = 1$.



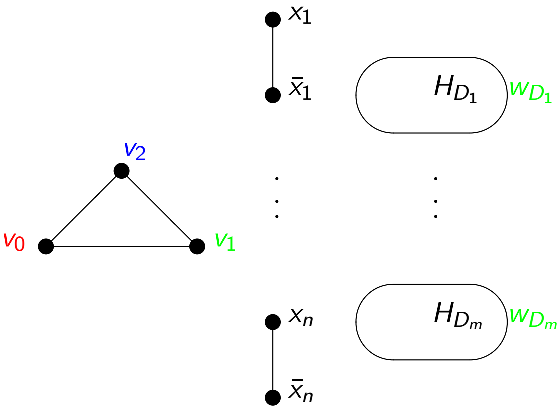
Задача 3-раскраски графов

Лемма 2. *Для любых $a, b, c \in \{0, 1\}$, не равных одновременно 0, существует такая раскраска $\rho : V_D \to \{0, 1, 2\}$ графа G_D, что $\rho(x_{i_1}^{\sigma_1}) = a$, $\rho(x_{i_2}^{\sigma_2}) = b$, $\rho(x_{i_3}^{\sigma_3}) = c$ и $\rho(w_D) = 1$.*



Задача 3-раскраски графов

КНФ $K(x_1, \ldots, x_n) = D_1 \cdot \ldots \cdot D_m$ сопоставим граф G_K:



Задача 3-раскраски графов

В подграфах H_{D_j} каждой вершине, кроме w_{D_j}, припишем верхний индекс (j), $j = 1, \dots, m$.

Граф $G_K = (V_K, E_K)$ содержит ребра:

1) (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_1, v_2);

2) $(x_i, \bar{x}_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$;

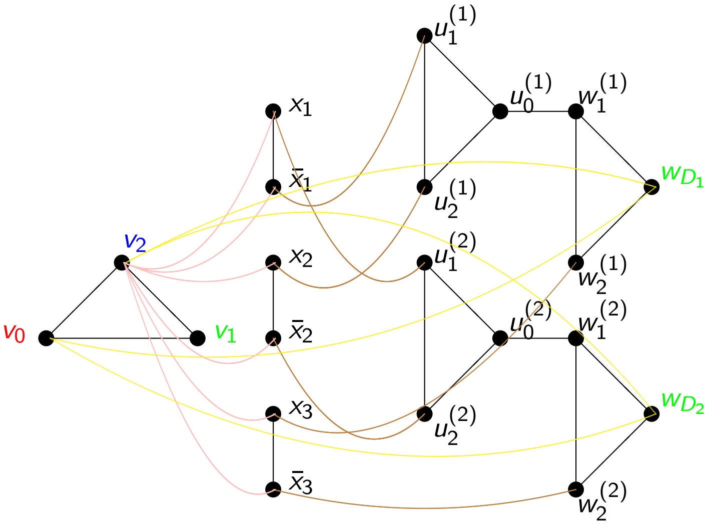
3) (v_2, x_i), $(v_2, \bar{x}_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$;

4) (v_0, w_{D_j}), (v_2, w_{D_j}) для всех $j = 1, \dots, m$;

5) все ребра подграфов H_{D_j} для всех $j = 1, \dots, m$;

6) если $D_j = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$, и $u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, w_2^{(j)}$ — вершины в подграфе H_{D_j}, то $(x_{i_1}^{\sigma_1}, u_1^{(j)})$, $(x_{i_2}^{\sigma_2}, u_2^{(j)})$, $(x_{i_3}^{\sigma_3}, w_2^{(j)})$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Граф G_K для $K = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$



Задача 3-раскраски графов

1. Отметим, что при любой раскраске вершин графа G_K в цвета $\{0, 1, 2\}$ вершины v_0, v_1, v_2 получат разные цвета.

2. Пусть, для определенности, вершина v_i получает цвет i, $i = 1, 2, 3$.

3. Тогда вершины w_{D_j} получают цвет 1.

4. Вершины x_i и $\bar{x}_i$ получают **разные** цвета из 0 и 1.

5. Из лемм 1 и 2 следует, что вершины графа G_K можно раскрасить в 3 цвета тогда и только тогда, когда найдется такой набор $\alpha \in E_2^n$, что $K(\alpha) = 1$.

$\square$

Задача k-раскраски графов

Теорема 2. *При каждом заданном числе $k \geqslant 3$ задача k-ВР является NP-полной.*