Лекция 9. Лемма о не слабо положительной функции и не слабо отрицательной функции. Лемма о небиюнктивной функции и немультиаффинной функции. Условная выразимость дизъюнкции трех литералов.

Лектор — Селезнева Светлана Николаевна
selezn@cs.msu.ru

факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Лекции на сайте http://mk.cs.msu.ru

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Лемма 1 (о не слабо положительной функции и не слабо отрицательной функции).
Если $S = \{g_p, g_n, x, \bar{x}\} \subseteq P_2$, *где* $g_p \notin WP$, $g_n \notin WN$, *то* $x_1 \oplus x_2$ *условно выразима над множеством* S.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Доказательство. По критерию слабой положительности для $g_p(x_1, \ldots, x_{n_1}) \notin WP$ найдутся такие наборы $\alpha_1, \alpha_2 \in N_1(g_p)$, что $\alpha_1 \vee \alpha_2 \notin N_1(g_p)$.
Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$\alpha_1 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1 - r_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{n_1}),$$
$$\alpha_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - r_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{n_1})$$

для некоторых $a_{k_1+1}, \ldots, a_{n_1} \in E_2$. Тогда

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1 - r_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{n_1}).$$

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Доказательство. По лемме о подстановке константы из функции $g_p(x_1, \ldots, x_{n_1})$ при помощи $x, \bar{x} \in S$ можно условно выразить функцию

$$g'_p(x_1, \ldots, x_{k_1}) = g_p(x_1, \ldots, x_{k_1}, a_{k_1+1}, \ldots, a_{n_1}).$$

Пусть

$$\alpha'_1 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1 - r_1}) \in E_2^{k_1},$$

$$\alpha'_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1 - r_1}) \in E_2^{k_1}.$$

Тогда

$$\alpha'_1 \vee \alpha'_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1 - r_1}) \in E_2^{k_1}.$$

Отметим, что $\alpha'_1, \alpha'_2 \in N_1(g'_p)$, $\alpha'_1 \vee \alpha'_2 \notin N_1(g'_p)$, т. е. $g'_p \notin WP$.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Положим $\varphi_1(x_1, x_2) = g_p'(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{r_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k_1 - r_1})$:

x_1	x_2	φ_1
0	0	a
0	1	1
1	0	1
1	1	0

где $a \in E_2$.

Рассмотрим возможные случаи.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Пусть $a = 0$:

x_1	x_2	φ_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Тогда $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Пусть $a = 1$:

x_1	x_2	φ_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Тогда проведем дополнительные рассуждения для функции $g_n \notin WN$.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Доказательство. По критерию слабой отрицательности для $g_n(x_1, \dots, x_{n_2}) \notin WN$ найдутся такие наборы $\beta_1, \beta_2 \in N_1(g_n)$, что $\beta_1 \cdot \beta_2 \notin N_1(g_n)$.
Не ограничивая общности рассуждений, пусть

$$\beta_1 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_2 - r_2}, b_{k_2+1}, \dots, b_{n_2}),$$
$$\beta_2 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2 - r_2}, b_{k_2+1}, \dots, b_{n_2}),$$

для некоторых $b_{k_2+1}, \dots, b_{n_2} \in E_2$. Тогда

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2 - r_2}, b_{k_2+1}, \dots, b_{n_2}).$$

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Доказательство. По лемме о подстановке константы из функции $g_n(x_1, \dots, x_{n_2})$ при помощи $x, \bar{x} \in S$ можно условно выразить функцию

$$g_n'(x_1, \dots, x_{k_2}) = g_n(x_1, \dots, x_{k_2}, b_{k_2+1}, \dots, b_{n_2}).$$

Пусть

$$\beta_1' = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_2 - r_2}) \in E_2^{k_2},$$

$$\beta_2' = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2 - r_2}) \in E_2^{k_2}.$$

Тогда

$$\beta_1' \cdot \beta_2' = (\underbrace{0, \dots, 0}_{r_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k_2 - r_2}) \in E_2^{k_2}.$$

Отметим, что $\beta_1', \beta_2' \in N_1(g_n')$, $\beta_1' \cdot \beta_2' \notin N_1(g_n')$, т. е. $g_n' \notin WN$.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Положим $\varphi_2(x_1, x_2) = g'_n(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{r_2}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k_2 - r_2})$:

x_1	x_2	φ_2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	b

где $b \in E_2$.

Лемма о функции не из WP и о функции не из WN

Получаем:

x_1	x_2	φ_1	φ_2	φ
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	b	0

Значит, $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) \cdot \varphi_2(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$.

$\square$

Функция $t(x_1, x_2, x_3)$

Пусть $t(x_1, x_2, x_3) \in P_2$ — функция, равная единице только на наборах **ровно с одной единицей**.

Т. е.

x_1	x_2	x_3	t
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Лемма 2 (о небиюнктивной функции и немультиаффинной функции).
Если $S = \{g_b, g_a, x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2\} \subseteq P_2$, *где* $g_b \notin B$, $g_a \notin MA$, *то либо* $d(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ *условно выразима над множеством* S, *либо* $t(x_1, x_2, x_3)$ *условно выразима над множеством* S.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Доказательство. Пусть $g_b(x_1, \ldots, x_{n_1}) \notin B$. Тогда $n_1 \geqslant 3$.

По критерию биюнктивности для $g_b(x_1, \ldots, x_{n_1}) \notin B$ найдутся такие наборы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in N_1(g_b)$, что $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \notin N_1(g_b)$.

Для каждого разряда i, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, наборов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ верна одна из восьми возможностей:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha_{1,i}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\alpha_{2,i}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\alpha_{3,i}$	0	1	0	1	0	1	0	1

Рассмотрим каждую из них.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Пусть для разряда i верно 1 или 8:

	1	8
$\alpha_{1,i}$	0	1
$\alpha_{2,i}$	0	1
$\alpha_{3,i}$	0	1

Тогда по лемме о подстановке константы из функции $g_b(x_1, \ldots, x_{n_1})$ при помощи $x, \bar{x} \in S$ условно выразим функцию

$$g_b(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n_1}),$$

где $a = 0$, если верно 1, и $a = 1$, если верно 8.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Выполнив такие действия сразу для всех разрядов i, для которых верно 1 или 8, получим функцию $g'_b(x_1, \ldots, x_{n'_1})$.

Пусть наборы $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \in E_2^{n'_1}$ получаются из наборов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ удалением всех разрядов i, для которых верно 1 или 8.

Тогда $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \in N_1(g'_b)$, $m(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) \notin N_1(g'_b)$, т. е. $g'_b \notin B$.

Кроме того, для каждого разряда i, $1 \leqslant i \leqslant n'_1$, наборов $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ верна одна из шести возможностей 2–7:

	2	3	4	5	6	7
$\alpha'_{1,i}$	0	0	0	1	1	1
$\alpha'_{2,i}$	0	1	1	0	0	1
$\alpha'_{3,i}$	1	0	1	0	1	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Пусть для разряда i верно 4, 6 или 7. Для определенности пусть верно 7:

	2	7
$\alpha'_{1,i}$	0	1
$\alpha'_{2,i}$	0	1
$\alpha'_{3,i}$	1	0

Тогда по лемме о навешивании отрицания из функции $g'_b(x_1, \ldots, x_{n'_1})$ при помощи $x_1 \oplus x_2 \in S$ условно выразим функцию

$$g'_b(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n'_1}).$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Выполнив такие действия сразу для всех разрядов i, для которых верно 4, 6 или 7, получим функцию $g''_b(x_1, \ldots, x_{n''_1})$.

Пусть наборы $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3 \in E_2^{n''_1}$ получаются из наборов $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ навешиванием отрицания над всеми разрядами i, для которых верно 4, 6 или 7.

Тогда $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3 \in N_1(g''_b)$, $m(\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3) \notin N_1(g''_b)$, т. е. $g''_b \notin B$.

Кроме того, для каждого разряда i, $1 \leqslant i \leqslant n''_1$, наборов $\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3$ верна одна из трех возможностей 2, 3 или 5:

	2	3	5
$\alpha''_{1,i}$	0	0	1
$\alpha''_{2,i}$	0	1	0
$\alpha''_{3,i}$	1	0	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

В функции $g''_b(x_1, \ldots, x_{n''_1})$ заменим переменную x_i на x_1, если для i верно 2, на x_2, если для i верно 3, и на x_3, если для i верно 5.

Получим функцию $\psi_1(x_1, x_2, x_3)$, для которой

$$\psi_1(0,0,1) = \psi_1(0,1,0) = \psi_1(1,0,0) = 1,$$

но

$$\psi_1(m((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))) = \psi_1(0,0,0) = 0.$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Итак,

x_1	x_2	x_3	ψ_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	a
1	0	0	1
1	0	1	b
1	1	0	c
1	1	1	d

где $a, b, c, d \in E_2$.

Рассмотрим возможные случаи.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Пусть $a = b = c = d = 1$:

x_1	x_2	x_3	ψ_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда $\psi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Пусть $a = b = c = 1$ и $d = 0$:

x_1	x_2	x_3	ψ_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Тогда

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Итак,

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

По лемме о подстановке константы из функции $\psi_1(x_1, x_2, x_3)$ при помощи $x \in S$ условно выразим функцию

$$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \psi_1(x_1, x_2, 1).$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Тогда

$$t(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1, x_2, x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) :$$

x_1	x_2	x_3	ψ_1	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	t
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Пусть $d = 0$ и a, b или c равно 0, для определенности, пусть $a = 0$. Тогда

$$t(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi_1(x_2, x_3, x_1) \cdot \psi_1(x_3, x_1, x_2) :$$

x_1	x_2	x_3	ψ_1	t
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	b	0
1	1	0	c	0
1	1	1	0	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Наконец, пусть $d = 1$ и a, b или c равно 0, для определенности, пусть $a = 0$. Тогда

$$I(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi_1(x_2, x_3, x_1) \cdot \psi_1(x_3, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 :$$

x_1	x_2	x_3	ψ_1	I
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	b	0
1	1	0	c	0
1	1	1	1	1

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Теперь проведем дополнительные рассуждения для функции $g_a \notin MA$.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Итак, $g_a(x_1, \ldots, x_{n_2}) \notin MA$. Тогда $n_2 \geqslant 2$.

По критерию мультиаффинности для $g_a(x_1, \ldots, x_{n_2}) \notin MA$ найдутся такие наборы $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in N_1(g_a)$, что $\beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \notin N_1(g_a)$.

Для каждого разряда i, $1 \leqslant i \leqslant n_2$, наборов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ верна одна из восьми возможностей:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_{1,i}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\beta_{2,i}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\beta_{3,i}$	0	1	0	1	0	1	0	1

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Аналогично применяя леммы о подстановке константы и о навешивании отрицания из функции $g_a(x_1, \dots, x_{n_2})$ при помощи $x, \bar{x}, x_1 \oplus x_2 \in S$ условно выразим функцию $g''_a(x_1, \dots, x_{n''_2})$.

При этом из наборов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ получим такие наборы $\beta''_1, \beta''_2, \beta''_3 \in E_2^{n''_2}$, что для каждого их разряда i, $1 \leqslant i \leqslant n''_2$, верна одна из трех возможностей 2, 3 или 5:

	2	3	5
$\beta''_{1,i}$	0	0	1
$\beta''_{2,i}$	0	1	0
$\beta''_{3,i}$	1	0	0

Далее $\beta''_1, \beta''_2, \beta''_3 \in N_1(g''_a)$, $\beta''_1 \oplus \beta''_2 \oplus \beta''_3 \notin N_1(g''_a)$, т. е. $g''_a \notin MA$.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

1. Пусть какая-то из трех возможностей 2, 3 или 5 не содержит разрядов. Пусть для определенности возможность 5 не содержит разрядов. Тогда в функции $g''_a(x_1, \dots, x_{n''_2})$ заменим переменную x_i на x_1, если для i верно 2, и на x_2, если для i верно 3.

Получим функцию $\varphi(x_1, x_2)$, для которой

$$\varphi(0,0) = \varphi(0,1) = \varphi(1,0) = 1,$$

но

$$\varphi((0,0) \oplus (0,1) \oplus (1,0)) = \varphi(1,1) = 0.$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Значит,

x_1	x_2	φ
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Т. е. $\varphi(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Тогда

$$t(x_1, x_2, x_3) = l(x_1, x_2, x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3):$$

x_1	x_2	x_3	l	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3$	$\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$	t
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

2. Теперь пусть каждая из трех возможностей 2, 3 или 5 содержит разряды. Тогда в функции $g''_a(x_1, \ldots, x_{n''_2})$ заменим переменную x_i на x_1, если для i верно 2, на x_2, если для i верно 3 и на x_3, если для i верно 5.

Получим функцию $\psi_2(x_1, x_2, x_3)$, для которой

$$\psi_2(0,0,1) = \psi_2(0,1,0) = \psi_2(1,0,0) = 1,$$

но

$$\psi_2((0,0,1) \oplus (0,1,0) \oplus (1,0,0)) = \psi_2(1,1,1) = 0.$$

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Итак,

x_1	x_2	x_3	ψ_2
0	0	0	a'
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	b'
1	0	0	1
1	0	1	c'
1	1	0	d'
1	1	1	0

где $a', b', c', d' \in E_2$.

Лемма о функции не из B и о функции не из MA

Тогда

$$t(x_1, x_2, x_3) = I(x_1, x_2, x_3) \cdot \psi_2(x_1, x_2, x_3):$$

x_1	x_2	x_3	I	ψ_2	t
0	0	0	0	a'	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	b'	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	c'	0
1	1	0	0	d'	0
1	1	1	1	0	0

$\square$

Лемма о дизъюнкции трех литералов

Лемма 3 (о дизъюнкции трех литералов).
Если $S = \{t(x_1, x_2, x_3), x_1 \oplus x_2\} \subseteq P_2$, *то* $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}$, *где* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$, *условно выразима над множеством* S.

Лемма о дизъюнкции трех литералов

Доказательство. Проверим, что

$$\begin{aligned} h \quad = \quad & (x_1 \oplus y_1) \cdot (x_2 \oplus y_2) \cdot (x_3 \oplus y_3) \cdot \\ & \cdot t(y_1, u_1, v_1) \cdot t(y_2, u_2, v_2) \cdot t(y_3, u_3, v_3) \cdot t(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

условно выражает $d(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ с вспомогательными переменными $y_1, y_2, y_3,\ u_1, u_2, u_3,\ v_1, v_2, v_3$.

Лемма о дизъюнкции трех литералов

Итак,

$$\begin{aligned} h &= (x_1 \oplus y_1) \cdot (x_2 \oplus y_2) \cdot (x_3 \oplus y_3) \cdot \\ &\cdot t(y_1, u_1, v_1) \cdot t(y_2, u_2, v_2) \cdot t(y_3, u_3, v_3) \cdot t(u_1, u_2, u_3). \end{aligned}$$

Если $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, то $y_1 = y_2 = y_3 = 1$.
Значит, $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$.
Поэтому $t(u_1, u_2, u_3) = 0$.

Лемма о дизъюнкции трех литералов

Итак,

$$h = (x_1 \oplus y_1) \cdot (x_2 \oplus y_2) \cdot (x_3 \oplus y_3) \cdot \\ \cdot t(y_1, u_1, v_1) \cdot t(y_2, u_2, v_2) \cdot t(y_3, u_3, v_3) \cdot t(u_1, u_2, u_3).$$

Пусть хотя бы одна из переменных x_1, x_2, x_3 равна 1.
Например, пусть $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$.
Тогда $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = 1$.
Поэтому можно положить $u_1 = 1$, $v_1 = u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$.
И $t(u_1, u_2, u_3) = 1$.

Остальные случаи разбираются аналогично.

Лемма о дизъюнкции трех литералов

Следовательно, h условно выражает $d(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ с вспомогательными переменными y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3.

По лемме о навешивании отрицания при помощи $x_1 \oplus x_2 \in S$ условно выразим $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}$ для любых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in E_2$.

$\square$

Конец лекции