

# Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

## Блок 17

Сколемовская стандартная форма (ССФ)

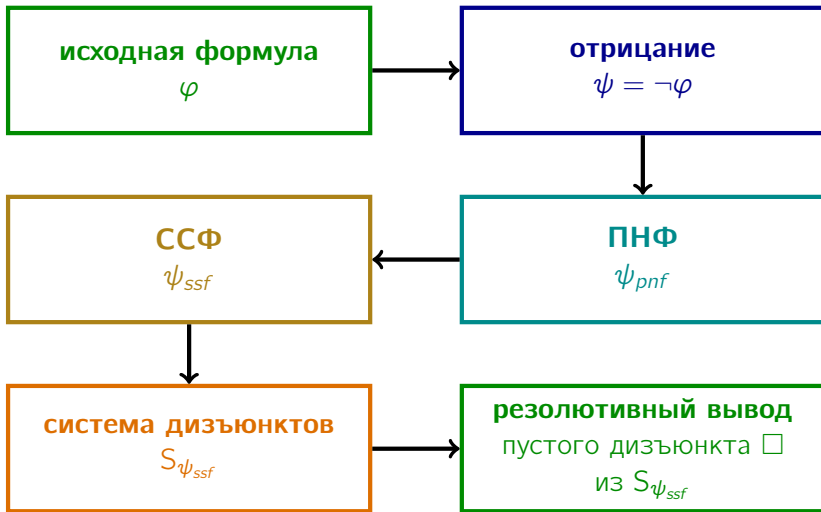
Лектор:

**Подымов Владислав Васильевич**

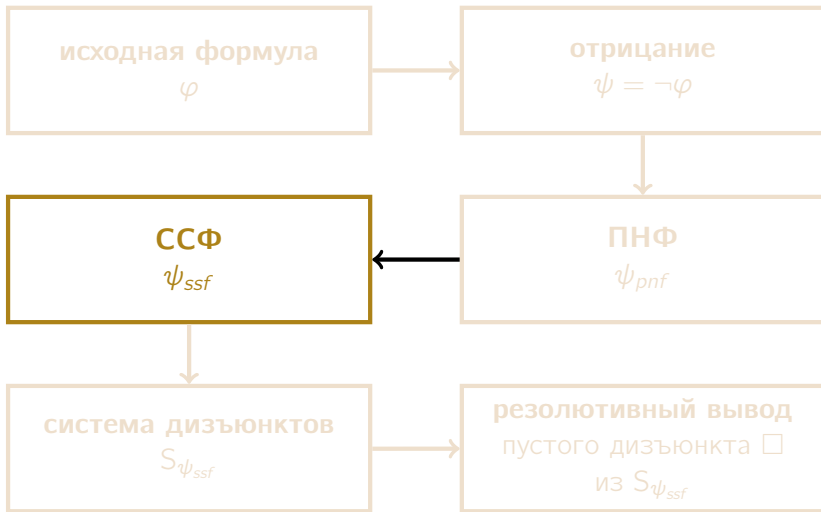
E-mail:

**valdus@yandex.ru**

ВМК МГУ, 2025, февраль–май



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf}$$

# Сколемовская стандартная форма

**Замкнутая** формула логики предикатов находится в **сколемовской стандартной форме (ССФ)**, если

- ▶ она находится в предварённой нормальной форме и
- ▶ её кванторная приставка не содержит кванторов  $\exists$ :

$$\forall \tilde{x}^n (D_1 \& \dots \& D_k)$$

**Например,** формула

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

находится в сколемовской стандартной форме

Наряду с «находится в ССФ» будем говорить «**является ССФ**»

На одном из этапов метода резолюций следует преобразовать ПНФ в настолько же (не)выполнимую ССФ

## Лемма об удалении квантора существования

Пусть  $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$  — замкнутая формула ЛП ( $n \geq 0$ ) и функциональный символ  $f$  не содержится в  $\chi$ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

**Небольшая вольность:** если слева от  $\exists$  не стоит ни одного  $\forall$ , то, согласно лемме,  $f$  — **0-местный функциональный символ**: так будем называть **константы**, и писать « $f()$ » наряду с « $f$ »

**Доказательство** ( $\Leftarrow$ )

Рассмотрим произвольную модель  $\mathcal{I}$  для формулы  $\forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$

По семантике « $\forall$ », для любого набора предметов  $\tilde{d}^n$  верно

$$\mathcal{I} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$$

Следовательно, верно и  $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$

По семантике « $\exists$ », верно  $\mathcal{I} \models (\exists x_{n+1} \chi)[\tilde{d}^n]$

По семантике « $\forall$ », так как набор предметов  $\tilde{d}^n$  произволен, верно и  $\mathcal{I} \models \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$

## Лемма об удалении квантора существования

Пусть  $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$  — замкнутая формула ЛП ( $n \geq 0$ ) и функциональный символ  $f$  не содержится в  $\chi$ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Доказательство ( $\Rightarrow$ )

Рассмотрим произвольную модель  $\mathcal{I}$  для формулы  $\varphi$

По семантике « $\forall$ » и « $\exists$ », для любого набора предметов  $\tilde{d}^n$  существует предмет  $d_{n+1}$ , такой что  $\mathcal{I} \models \chi[\tilde{d}^n, d_{n+1}]$

По  $\mathcal{I}$  построим **новую** интерпретацию  $\mathcal{J}$ :

если в сигнатуре был функциональный символ  $f$ , удалим его добавим в сигнатуру функциональный символ  $f^{(n)}$  оценим  $f$  так, чтобы выполнялось равенство  $\bar{f}(\tilde{d}^n) = d_{n+1}$

Тогда  $\mathcal{J} \models \chi[\tilde{d}^n, \bar{f}(\tilde{d}^n)]$ , а значит, и  $\mathcal{J} \models \chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\}[\tilde{d}^n]$

По семантике « $\forall$ », так как набор предметов  $\tilde{d}^n$  произволен, верно и  $\mathcal{J} \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$  ▼

## Лемма об удалении квантора существования

Пусть  $\varphi = \forall \tilde{x}^n \exists x_{n+1} \chi$  — замкнутая формула ЛП ( $n \geq 0$ ) и функциональный символ  $f$  не содержится в  $\chi$ . Тогда

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \models \forall \tilde{x}^n (\chi\{x_{n+1}/f(\tilde{x}^n)\})$$

Устранение квантора  $\exists$  с введением новых символов с целью получить более простую «хорошую» формулу обычно называют **сколемизацией** (здесь «хорошая» — сохраняющая выполнимость и невыполнимость)

При устранении  $\exists$  на место удаляемой переменной подставляются **сколемовские термы** (здесь —  $f(\tilde{x}^n)$ )

# Алгоритм сколемизации ПНФ

*Дано:* ПНФ  $\varphi_{pnf}$

*Требуется* получить ССФ  $Sk(\varphi_{pnf})$ , такую что

$$\varphi_{pnf} \text{ выполнима} \Leftrightarrow Sk(\varphi_{pnf}) \text{ выполнима}$$

*Алгоритм.* Пока в кванторной приставке есть хотя бы один квантор  $\exists$ , самый левый  $\exists$  удаляется при помощи подстановки сколемовского терма:

$$\varphi_{pnf} = \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots \chi$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \exists x_m \dots (\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \dots, x_{k-1})\})$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \forall x_{k+1} \dots \forall x_{m-1} \dots$$

$$(\chi\{x_k/\mathbf{f}_1(x_1, \dots, x_{k-1}), x_m/\mathbf{f}_2(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m-1})\})$$

...

$$Sk(\varphi_{pnf})$$

При этом **важно (!)** при удалении очередного  $\exists$  каждый раз выбирать **новый** функциональный символ: не содержащийся в формуле после всех предыдущих удалений



# Алгоритм сколемизации ПНФ

## Пример:

$$\forall x \exists z \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(z) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \exists y \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, y)) \& \neg R(x, u))$$

$$\forall x \forall u (P(x) \& (\neg P(\mathbf{f}(x)) \vee R(x, \mathbf{g}(x))) \& \neg R(x, u))$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 1, кроме f

# Алгоритм сколемизации ПНФ

## Другой пример:

$$\exists u \exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(u, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, u))$$
$$\exists v \forall w \exists x \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, v) \& P(v, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \exists x \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, x) \& P(x, y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \forall y \exists z (P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, \mathbf{f}(w)) \& P(\mathbf{f}(w), y) \& P(y, z) \& P(z, \mathbf{c}))$$
$$\forall w \forall y ( P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \& P(\mathbf{d}, w) \& P(w, \mathbf{f}(w)) \& \\ P(\mathbf{f}(w), y) \& P(y, \mathbf{g}(w, y)) \& P(\mathbf{g}(w, y), \mathbf{c}) )$$

Ограничения на выбор символов в сколемовских термах:

- ▶ **c** — любая константа (ни одной не содержится в формуле)
- ▶ **d** — любая константа, кроме c
- ▶ **f** — любой функциональный символ местности 1 (ни один не содержится в формуле)
- ▶ **g** — любой функциональный символ местности 2 (ни один не содержится в формуле)

# Алгоритм сколемизации ПНФ

**Теорема (о сколемизации).** Для любой ПНФ  $\varphi_{pnf}$  формула  $Sk(\varphi_{pnf})$  является ССФ, для которой верно следующее:

$$\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models Sk(\varphi_{pnf})$$

Доказательство.

Пусть  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  — формулы, последовательно получающиеся удалением кванторов  $\exists$  (по одному) согласно алгоритму сколемизации ( $\psi_1 = \varphi_{pnf}$ ,  $\psi_k = Sk(\varphi_{pnf})$ )

По лемме об удалении квантора  $\exists$ , справедливы равносильности

$$\models \varphi_{pnf} \quad \Leftrightarrow \quad \models \psi_2 \quad \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \quad \models Sk(\varphi_{pnf}) \quad \blacktriangledown$$

А если в формулировке теоремы заменить «выполнима» ( $\models$ ) на «общезначима» ( $\models$ ), останутся ли верными  $\Rightarrow$  и  $\Leftarrow$ ?