Дополнительные задачи к разделу «Минимизация ДНФ и связанные с ней задачи»

Решения задач 1-3 присылать по адресу `lozhkin@cs.msu.su`, задача 4 больше **не принимается**. Каждая задача засчитывается первому приславшему правильное решение на нее. В задаче 1 учитывается число переменных приведенной функции, функции от меньшего числа переменных имеют приоритет.

Задача 1.

Привести пример булевой функции, у которой ни одна минимальная ДНФ не является кратчайшей и, наоборот, ни одна кратчайшая ДНФ не является минимальной, и которая имеет (по возможности) меньшее число переменных.

Задача 2.

Найти длину кратчайшей ДНФ для поясковой симметрической функции от n переменных с отрезком рабочих чисел $[r, n-r]$, для любого r, $1 \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$.

Задача 3.

Найти число различных минимальных ДНФ для поясковой симметрической функции от n переменных с отрезком рабочих чисел $[1, n-1]$ (и дать описание этих ДНФ).

Задача 4. (Получены верные решения. Больше не принимается.)

Рассматриваются функции алгебры логики (ФАЛ) от 4 переменных. Для каждой ФАЛ f определяется характеристическое множество $N_f = \{\alpha \in B^4 : f(\alpha) = 1\}$. С геометрической точки зрения на булевом кубе B^4 это множество представляет собой граф, множество вершин которого – N_f, а ребра соединяют соседние наборы в нем. В этом графе можно выделить максимальные грани, которые будут соответствовать простым импликантам в сокращенной ДНФ ФАЛ f. Тогда будем рассматривать этот граф как гиперграф[1]. Вершины этого гиперграфа — множество N_f, а гиперрёбра — это все максимальные грани ФАЛ f.

Два гиперграфа $H_1 = (V_1, E_1)$ и $H_2 = (V_2, E_2)$ называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ такое, что $(v_1, \ldots, v_k) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)) \in E_2$ для всех $k = 1, \ldots, |V_1|$, и всех $v_1, \ldots, v_k \in E_1$. Из определения следует, что если гиперграфы изоморфны, то они имеют одинаковое количество вершин, одинаковое количество гиперребер и одинаковый набор мощностей гиперребер.

[1] Гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где V – произвольное множество вершин, а E – множество гиперребер. Каждое гиперребро $e \in E$ — это любое непустое подмножество множества V, то есть $e \subseteq V$, $e \neq \varnothing$. Если каждое гиперребро – двухэлементно, то гиперграф является обычным графом.

Требуется найти количество попарно неизоморфных гиперграфов, соответствующих (указанным выше способом) всем ФАЛ от четырех переменных. На рис. 1 представлен пример двух ФАЛ, имеющих изоморфные гиперграфы из граней характеристических множеств. Следует заметить, что если рассматривать эти два множества как графы, то такие графы не являются изоморфными.

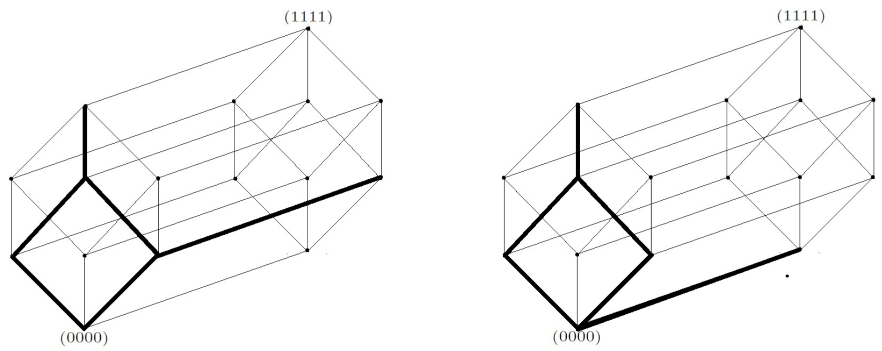

Рис. 1: Пример изоморфных гиперграфов из граней для двух ФАЛ.

Неформально говоря, задача состоит в том, чтобы найти все возможные «структуры» множества N_f, которые могут быть в кубе B^4. Такими «структурами» являются точка в B^4, ребро в B^4, квадрат в B^4, квадрат с изолированной точкой, квадрат с «присоединенным» к нему ребром, и т.д.

Ответ на задачу принимается в виде текстового файла, в котором должен быть представлен список ФАЛ-представителей каждого из попарно неизоморфных гиперграфов (по одной функции на каждый гиперграф в произвольном порядке). Каждая ФАЛ должна быть записана на отдельной строке в виде числа, двоичная запись которого совпадает со столбцом значений этой ФАЛ.

Задачу можно (и нужно) решать с помощью компьютера.