

Математическая логика и логическое программирование

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы

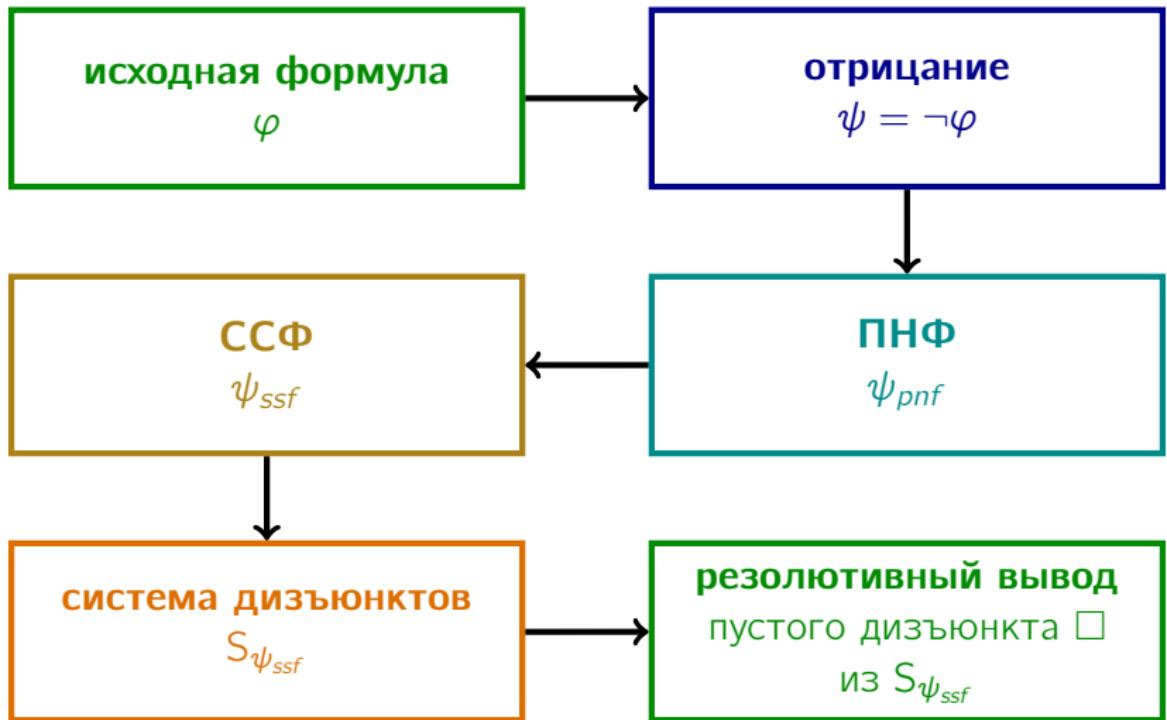
→ Математическая логика и логическое программирование (3-й поток)

Блок 22

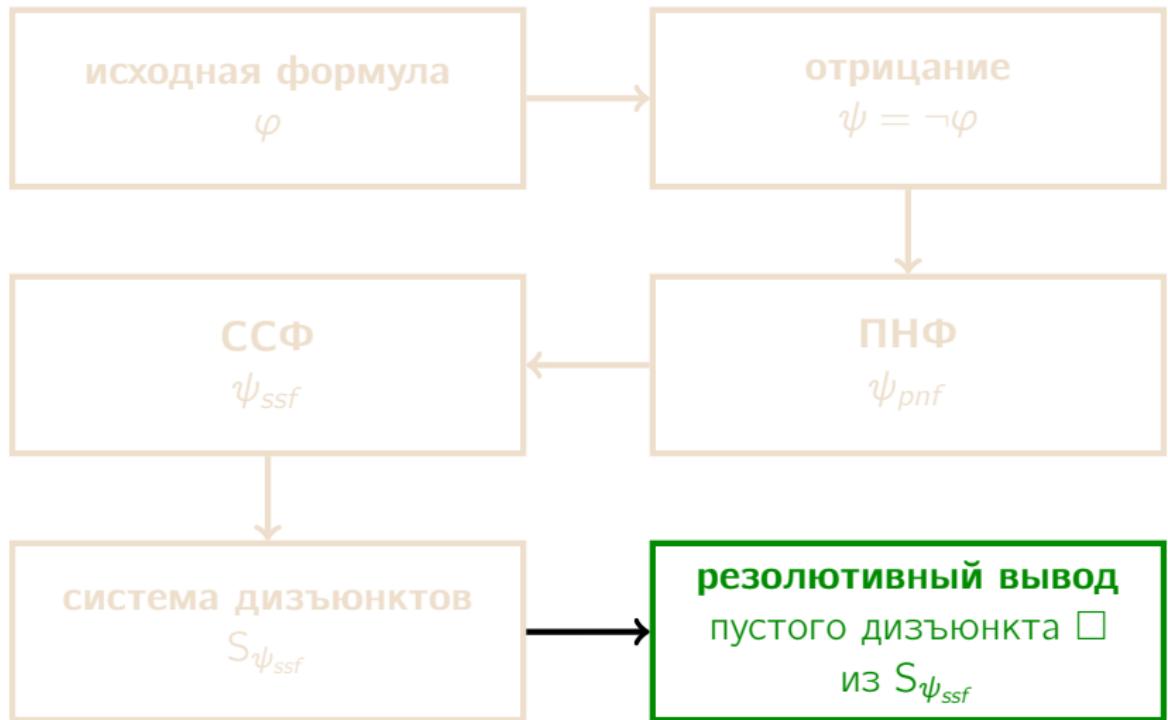
Резолютивный вывод
Корректность резолютивного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2025, сентябрь–декабрь



$$\models \varphi \Leftrightarrow \models \psi \Leftrightarrow \models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \models S_{\psi_{ssf}}$$



$$\models \varphi \Leftrightarrow \not\models \psi \Leftrightarrow \not\models \psi_{pnf} \Leftrightarrow \not\models \psi_{ssf} \Leftrightarrow \not\models S_{\psi_{ssf}}$$

Ещё немного определений

Положительная литерा — это атом

Отрицательная литерा — это отрицание атома

Если E — логическое выражение и θ — подстановка, то:

- ▶ $E\theta$ — пример выражения E
- ▶ если $\text{Var}_{E\theta} = \emptyset$, то $E\theta$ — основной пример
- ▶ если $\theta : \text{Var} \rightarrow \text{Var}$ — биекция, то
 - ▶ θ — переименование
 - ▶ $E\theta$ — вариант выражения E

Ещё немного определений

Пример

Рассмотрим выражение $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$ и подстановки

$$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$$

$$\eta = \{x/g(d), y/z\}$$

$$\mu = \{z/c\}$$

$$\varepsilon = \{\}$$

Тогда:

- подстановки θ и ε — **переименования**, а η и μ — нет
- $E\eta = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — **пример** выражения E
- $E\eta\mu = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$ — **основной пример** выражения E
- $E\theta = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — **вариант** выражения E

Правило резолюции

Правило резолюции:

$$\frac{D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2}{(D_1 \vee D_2)\theta}$$

Здесь

- ▶ D_1, D_2 — дизъюнкты
- ▶ L_1, L_2 — положительные литеры
- ▶ $\theta \in HOY(L_1, L_2)$

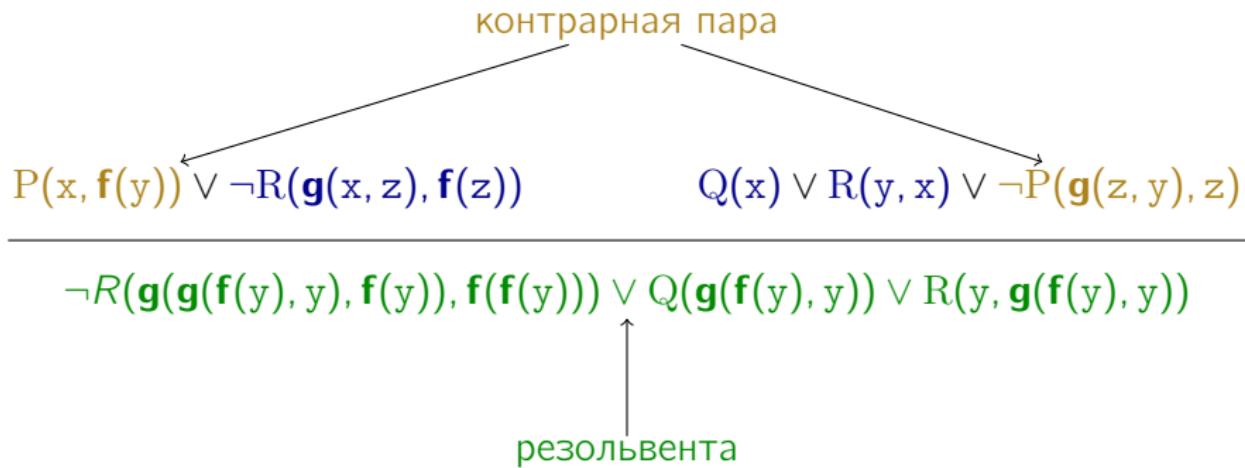
При использовании правила резолюции
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D_1 \vee D_2)\theta$ — **результат** дизъюнктов $D_1 \vee L_1, D_2 \vee \neg L_2$

Литеры $L_1, \neg L_2$ образуют **контрарную пару**

Правило резолюции

Пример

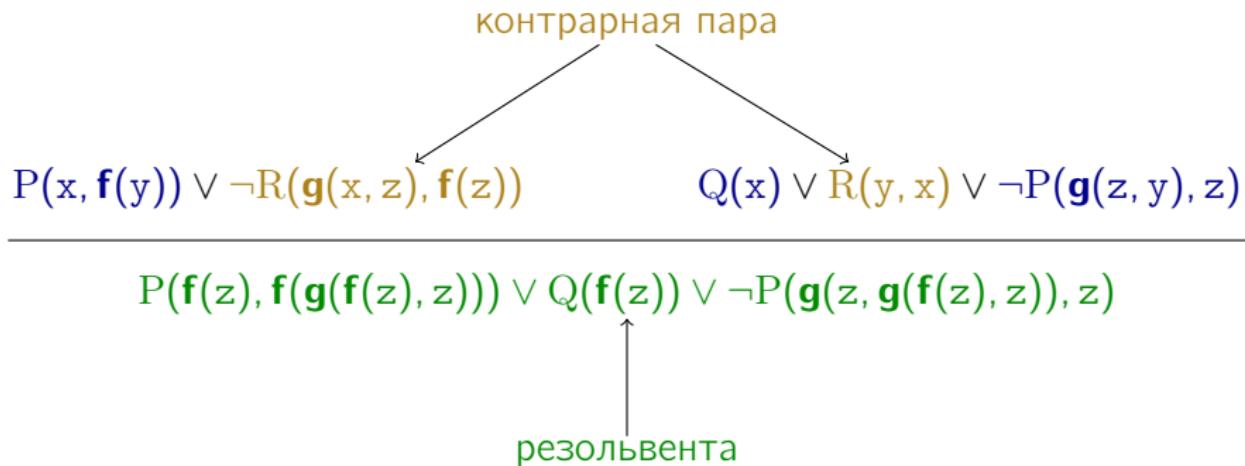


$$\theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\} \in HOY(P(x, f(y)), P(g(z, y), z))$$

резольвента: $(\neg R(g(x, z), f(z)) \vee Q(x) \vee R(y, x))\theta$

Правило резолюции

Пример



$$\theta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\} \in HOY(R(g(x, z), f(z)), R(y, x))$$

резольвента: $(P(x, f(y)) \vee Q(x) \vee \neg P(g(z, y), z))\theta$

Правило резолюции

Пример

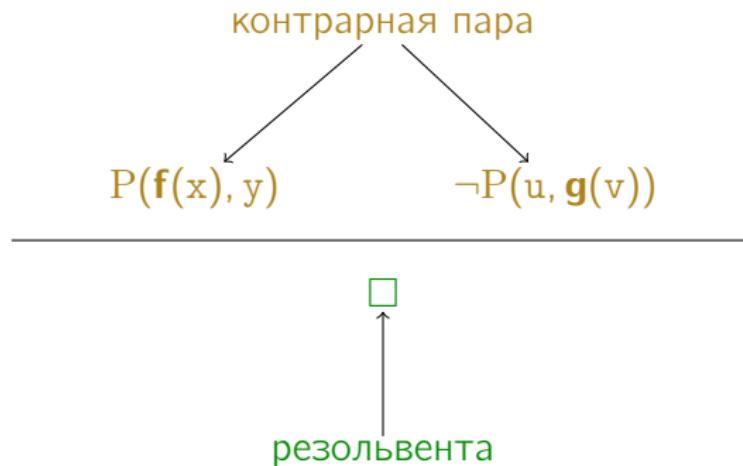


$$\theta = \{y/g(v), u/f(x)\} \in HOY(P(f(x), y), P(u, g(v)))$$

результат: (???) θ

Правило резолюции

Пример



$$\theta = \{y/g(v), u/f(x)\} \in HOY(P(f(x), y), \neg P(u, g(v)))$$

rezольвента: (пустое мультимножество литер) θ

Правило резолюции

Лемма (о корректности правила резолюции)

Если D — резольвента дизъюнктов D_1, D_2 , то $D_1, D_2 \models D$

Доказательство

(кванторные приставки опущены)

Пусть $D_1 = D'_1 \vee L_1$, $D_2 = D'_2 \vee \neg L_2$, $\theta \in HOY(L_1, L_2)$,
 $D = (D'_1 \vee D'_2)\theta$ и $L_1\theta = L_2\theta = L$

Тогда по свойствам отношения \models и операции \vee верно следующее:

$$D_1 \models D_1\theta$$

$$D_2 \models D_2\theta$$

$$D_1 \models D'_1\theta \vee L_1\theta$$

$$D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L_2\theta$$

$$D_1 \models D'_1\theta \vee L$$

$$D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee L$$

$$D_1, D_2 \models D'_2\theta \vee \neg L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee L$$

$$D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee \neg L$$

Заметим, что если $\Gamma \models A \vee B$ и $\Gamma \models A \vee \neg B$, то $\Gamma \models A$ (очевидно?)

Тогда $D_1, D_2 \models D'_1\theta \vee D'_2\theta$

То есть $D_1, D_2 \models D$ ▼

Правило склейки

Применение одного только правила резолюции далеко не всегда позволяет вывести \Box из невыполнимой системы

Например:

$$\begin{aligned} P(x) \vee P(c) \\ \neg P(c) \vee \neg P(y) \end{aligned}$$

Система из таких двух дизъюнктов **невыполнима**, но все резольвенты, резольвенты резольвент и т.д. этих дизъюнктов имеют **ровно две литеры**

Необходимо иметь правило, которое позволит получать \Box и из таких систем

Правило склейки

Правило склейки

$$\frac{D \vee L_1 \vee L_2}{(D \vee L_1)\theta}$$

Здесь

- ▶ D — дизъюнкт
- ▶ L_1, L_2 — литеры
- ▶ $\theta \in HOY(L_1, L_2)$

При использовании правила склейки
допускается перестановка слагаемых дизъюнктов

Дизъюнкт $(D \vee L_1)\theta$ — склейка дизъюнкта $D \vee L_1 \vee L_2$

Литеры L_1, L_2 образуют склеиваемую пару

Правило склейки

Пример

$$\frac{\text{склеиваемая пара}}{P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)} \overline{\quad}$$
$$P(c) \vee \neg R(c, f(c), f(c))$$

↑
склейка

$$\theta = \{x/c, y/c, z/f(c)\} \in \text{НОУ}(\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z))$$

$$\text{склейка: } (P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)))\theta$$

Лемма (о корректности правила склейки)

Если D — склейка дизъюнкта D_1 , то $D_1 \models D$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы о корректности правила резолюции

Резолютивный вывод

Пусть S — система дизъюнктов

Резолютивный вывод из S — это
конечная последовательность дизъюнктов

$$D_1, \dots, D_i, \dots, D_k,$$

такая что каждый дизъюнкт D_i является

- ▶ вариантом дизъюнкта из S ,
- ▶ склейкой дизъюнкта D_j , где $j < i$, или
- ▶ резольвентой дизъюнктов D_j, D_m , где $j < i$ и $m < i$

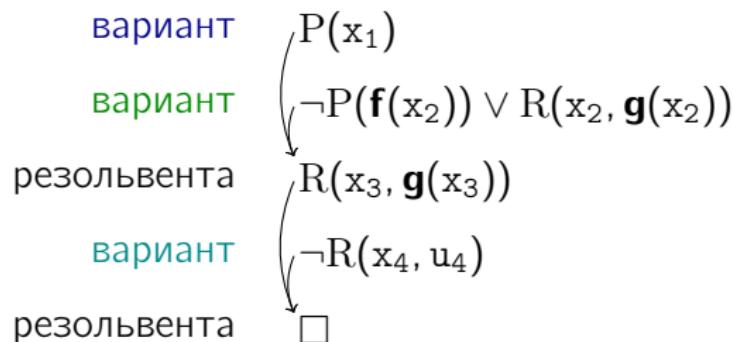
Дизъюнкт **резолютивно выводим** из S , если существует
резолютивный вывод из S , оканчивающийся этим дизъюнктом

Резолютивный вывод

Пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ \neg P(f(x)) \vee R(x, g(x)) \\ \neg R(x, u) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод \square из S :



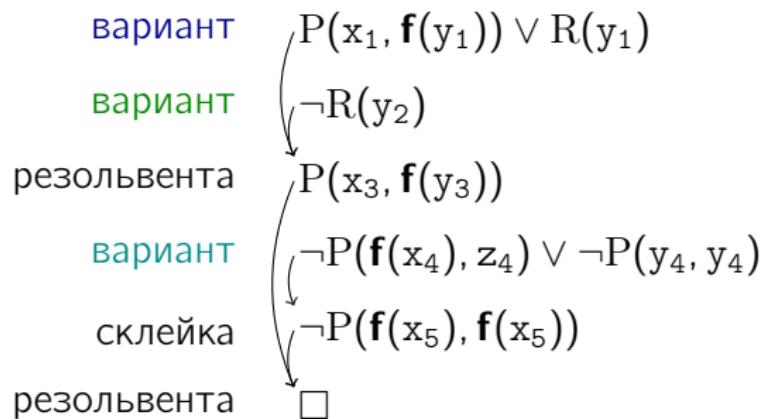
Следовательно, \square резолютивно выводим из системы S

Резолютивный вывод

Другой пример

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y) \\ P(x, f(y)) \vee R(y) \\ \neg R(y) \end{array} \right\}$$

Резолютивный вывод \square из S :



Резолютивный вывод

Возможность использования всевозможных **вариантов** дизъюнктов наряду с самими дизъюнктами в резолютивном выводе настолько же важна, насколько и возможность использования резольвент и склеек

Например: $S = \{\neg P(x), P(f(x))\}$

$$\text{НОУ}(P(x), P(f(x))) = \emptyset$$

Значит, у этих дизъюнктов нет ни одной резольвенты

При этом система S невыполнима:

у формул $\forall x \neg P(x)$ и $\forall x P(f(x))$ нет общих моделей

К **вариантам** дизъюнктов из S применимо правило резолюции:

$$\{x_1/f(x_2)\} \in \text{НОУ}(P(x_1), P(f(x_2)))$$

Корректность использования всевозможных вариантов дизъюнктов обеспечивается следующей равносильностью:

$$\forall x \varphi \sim \forall y (\varphi\{x/y\}), \text{ если } < \dots >$$

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод **успешен**,
если он оканчивается пустым дизъюнктом (\square)

Успешный резолютивный вывод также называется
резолютивным опровержением:

- ▶ предположим, что
исходная система дизъюнктов выполнима
- ▶ тогда система, к которой добавлены все дизъюнкты вывода,
также выполнима (*это обосновывается дальше*)
- ▶ **противоречие:** среди добавленных дизъюнктов
есть тождественно ложный (\square), а значит,
расширенная система дизъюнктов невыполнима
- ▶ полученное противоречие
опровергает выполнимость исходной системы
(*доказывает невыполнимость методом «от противного»*)

Корректность резолютивного вывода

Теорема (о корректности резолютивного вывода)

**Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим \square ,
то система S невыполнима**

Доказательство.

Вариант D' любого дизъюнкта D равносителен D , а значит, $D \models D'$

По **корректности правила резолюции**:

если D'' — *резольвента* дизъюнктов D_1, D_2 , то $D_1, D_2 \models D''$

По **корректности правила склейки**:

если D''' — *склейка* дизъюнкта D_3 , то $D_3 \models D'''$

Значит, по **транзитивности логического следования**,

любой дизъюнкт, выводимый из S ,

является логическим следствием S , и в частности, $S \models \square$

При этом дизъюнкт \square не имеет ни одной модели,

а значит, и система S не имеет ни одной модели \blacktriangledown