

Московский государственный университет  
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С. А. Ложкин

# ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ КИБЕРНЕТИКИ

Вариант 2015 г. (гр. 318), глава 2

Москва 2015

## Оглавление

Введение	3
<b>2 Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления</b>	<b>6</b>
§1 Основные понятия из теории графов, сетей, схем. Свойства матриц достижимости сетей, оценка числа сетей . . . . .	6
§2 Формулы, их структура, эквивалентность и способы задания. Оптимизация подобных формул по глубине . . . . .	15
§3 Схемы из функциональных элементов. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ . . . . .	24
§4 Контактные схемы и $\pi$ -схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных схем . . . . .	32
Литература	45

## Введение

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМиК МГУ с первых лет его существования. В настоящее время он читается в 6–8 семестрах и является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объем и, в некоторой степени, программа курса «Основы кибернетики» варьируются в зависимости от профиля.

Курс «Основы кибернетики» посвящен изложению теории дискретных управляющих систем, которая представляет собой часть дискретной математики и математической кибернетики. В ней разрабатываются и изучаются дискретные математические модели, описывающие функционирование и структуру сложных систем преобразования информации (интегральных схем, программ и т. п.). В основе этих моделей лежат различные способы задания функционирования управляющих систем с помощью дискретных функций и их структурная реализация в тех или иных классах графов (классах схем). При исследовании управляющих систем ставятся и решаются две основные задачи: задача анализа и задача синтеза.

Задача анализа состоит в нахождении функционирования данной схемы, а задача синтеза — в построении схемы, имеющей (реализующей) заданное функционирование. Каждая из этих задач может рассматриваться либо как индивидуальная задача, и тогда ее решением является конкрет-

ное функционирование (схема), либо как массовая задача, и тогда ее решением должен быть алгоритм нахождения функционирования (схемы). Задача синтеза имеет, как правило, множество решений, из которых выбирают решение, оптимальное по какому-либо критерию. Чаще всего в качестве такого критерия выступает сложность схемы, понимаемая как сумма сложностей составляющих ее элементов или задержка схемы, понимаемая как максимальная сумма задержек для последовательно соединенных элементов схемы.

С содержательной точки зрения различные критерии оптимальности отражают различные параметры моделируемых электронных схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах и т. п.

Если задача синтеза решена в одной модели, можно попытаться перенести это решение в другие модели с помощью структурного моделирования. Кроме того, полученное решение можно «улучшить» с помощью эквивалентных преобразований. С другой стороны, если задача синтеза решена для одних функций, можно попытаться «разбить» (декомпозировать) новую функцию на уже рассмотренные и построить из синтезированных для них схем схему для новой функции с помощью операции суперпозиции.

Указанные выше задачи рассматриваются в лекциях для всех основных классов схем (дизъюнктивные нормальные формы, формулы и схемы из функциональных элементов, контактные схемы), а также для некоторых модификаций этих классов.

Первая глава посвящена различным вопросам представления функций алгебры логики с помощью таблиц и дизъюн-

ктивных нормальных форм (минимизация дизъюнктивных нормальных форм).

Вторая глава содержит описание структуры и функционирования схем из основных классов управляющих систем, а также из некоторых классов, представляющих собой их обобщения или модификации. В ней устанавливаются верхние оценки числа схем различных типов, рассматриваются особенности применения операции суперпозиции в различных классах схем и некоторые вопросы их структурного моделирования.

В третьей главе подробно рассматривается задача синтеза управляющих систем. В ней приводится целый спектр методов синтеза схем (от простейших до асимптотически оптимальных), устанавливаются нижние мощностные оценки функций Шеннона и оценки сложности ряда конкретных функций, доказывается минимальность некоторых схем.

## Глава 2

### Основные классы управляющих систем. Оценка числа схем, их структурные представления. Некоторые модели и классы схем, связанные с программно-аппаратной реализацией алгоритмов

#### §1 Основные понятия из теории графов, сетей, схем. Свойства матриц достижимости сетей, оценка числа сетей

Понятие графа, которое обобщает понятие бинарного отношения (см. §1 главы 1), часто используется для описания структурных моделей, связанных с вычислениями, представлениями или реализациями дискретных функций. Напомним основные понятия и обозначения из теории графов, сетей и схем, а также сформулируем некоторые известные результаты (см., например, [3, 27, 8]).

Пару  $(V, E)$ , где  $E$  — сочетание (с возможными повторениями) над множеством упорядоченных и неупорядоченных пар из  $V$ , будем, как обычно, называть *графом с множеством вершин  $V = V(G)$  и множеством ребер  $E = E(G)$* . При этом длина сочетания  $E$  считается числом ребер графа  $G$  и обозначается через  $|E|$ . Упорядоченные (неупорядоченные) пары вершин называются *ориентированными ребрами*

ми или, иначе, *дугами* (соответственно *неориентированными ребрами*), одинаковые пары — *параллельными ребрами* (*дугами*), дуги, отличающиеся порядком вершин, — *противоположными дугами*, а пары из совпадающих вершин — *петлями*. Граф из ориентированных (неориентированных) ребер считается *ориентированным* (соответственно *неориентированным*). Заметим, что бинарное отношение представляет собой ориентированный граф без параллельных дуг. При этом симметричное антирефлексивное отношение можно рассматривать как неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

Будем говорить, что ориентированное (неориентированное) ребро *инцидентно* составляющим его вершинам, а дуга  $(u, v)$  *исходит* или, иначе, *выходит* из вершины  $u$  и *заходит* или, иначе, *входит* в вершину  $v$ . Число ребер, инцидентных вершине  $v$  (входящих в  $v$ , выходящих из  $v$ ) в графе  $G$ , называется *степенью* (соответственно *полустепенью захода*, *полустепенью исхода*) вершины  $v$  в графе  $G$  и обозначается через  $d_G(v)$  (соответственно  $d_G^+(v)$ ,  $d_G^-(v)$ ). Заметим, что

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|, \quad (1.1)$$

и что  $d_G(v) = d_G^+(v) + d_G^-(v)$  ( $d_G(v) = d_G^+(v) = d_G^-(v)$ ) в случае ориентированного (соответственно неориентированного) графа  $G$ .

Вершина  $v$  называется *изолированной вершиной* (*стоком*, *истоком*) графа  $G$ , если  $d_G(v) = 0$  (соответственно  $d_G^-(v) = 0$ ,  $d_G^+(v) = 0$ ). Ориентированный граф  $G$  называется  $r$ -ичным (строго  $r$ -ичным) графом, если  $d_G^+(v) \leq r$  (соответственно  $d_G^+(v) = r$ ) для любой отличной от истока вершины  $v$ ,  $v \in V(G)$ .

Граф  $G' = (V', E')$  называется *подграфом* графа  $G = (V, E)$ , если  $V' \subseteq V$  и  $E' \subseteq E$ . При этом  $G'$  считается *подграфом графа  $G$ , натянутым на множество вершин*

$V'$ , если  $E'$  включает в себя все входящие в  $E$  пары вершин из  $V'$ . Подграф, содержащий все вершины исходного графа, называется его *остовным подграфом*. Легко видеть, что подграф всегда можно получить из исходного графа в результате (многократного) применения операций *удаления ребра* или *удаления вершины*. При этом удаление вершины, как обычно, подразумевает удаление всех инцидентных ей ребер.

При определении понятий, связанных с «движениями» по графу, ограничимся случаем ориентированных графов, считая, как обычно, что неориентированное ребро эквивалентно двум противоположным дугам, связанным с той же парой вершин. Последовательность  $C$ , состоящая из ребер  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , где  $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$  при всех  $i, i \in [1, n]$ , называется  $(v_1 - v_{n+1})$ -*путем* графа  $G$ . При этом вершина  $v_1$  ( $v_{n+1}$ ) считается *начальной* (соответственно *конечной*) вершиной этого пути, вершины  $v_2, \dots, v_n$  — его *внутренними* вершинами, а число  $n$  — его *длиной*. Если все ребра пути различны (как элементы соответствующего сочетания), то он называется *цепью*, а если, кроме того, различны все его вершины, то — *простой цепью*. Если начальная и конечная вершины пути (цепи)  $C$  совпадают, то  $C$  считается *замкнутым путем* (соответственно *циклом*). Цикл, в котором все вершины, кроме начальной и конечной, различны, называется *простым циклом*.

Будем говорить, что *вершина  $u$  достижима из вершины  $v$  в графе  $G$* , где  $u, v \in V(G)$ , если  $u = v$  или в  $G$  существует  $(v - u)$ -цепь. Заметим, что отношение достижимости вершин графа  $G$  является рефлексивным и транзитивным, а если  $G$  — неориентированный граф, то и симметричным. Следовательно, множество вершин графа  $G$  распадается на классы эквивалентности по отношению их достижимости в графе  $\widehat{G}$ , который получается из графа  $G$  заменой каждой дуги на соответствующее неориентированное ребро ( $G = \widehat{G}$ ,



если  $G$  — неориентированный граф). При этом подграф графа  $G$ , натянутый на каждый такой класс вершин, называется *связной компонентой* графа  $G$ , а множество всех его связных компонент обозначается через  $c(G)$ . Граф  $G$  называется *связным*, если  $|c(G)| = 1$ .

Напомним, что

$$|E(G)| - |V(G)| + |c(G)| \geq 0 \quad (1.2)$$

и что левая часть (1.2) называется *цикломатическим числом* графа  $G$ . Напомним также, что это число равно максимальному числу линейно независимых относительно операции симметрической разности<sup>1</sup> остовных подграфов графа  $G$ , состоящих из одного простого цикла и изолированных вершин.

Множество  $S$ , которое состоит из ребер графа  $G = (V, E)$  и обладает тем свойством, что вершина  $u$ ,  $u \in V$ , достижима из вершины  $v$ ,  $v \in V$ , в графе  $G$ , но не достижима из нее в графе  $(V, E \setminus S)$ , называется *( $u|v$ )-сечением* графа  $G$ . Легко видеть, что любая  $(u - v)$ -цепь графа  $G$  имеет хотя бы одно общее ребро с любым  $(u|v)$ -сечением этого графа. Сечение, которое не имеет собственных подмножеств, являющихся сечением, называется *тупиковым*.

Неориентированный (ориентированный) граф, не имеющий циклов (соответственно ориентированных циклов), называется *ациклическим*. Заметим, что в ориентированном ациклическом графе  $G$  всегда есть как стоки, так и истоки. При этом для каждой его вершины  $v$  можно определить

<sup>1</sup>Под симметрической разностью графов  $G_1$  и  $G_2$  понимается граф  $G$ , для которого

$$\begin{aligned} V(G) &= V(G_1) \cup V(G_2), \\ E(G) &= (E(G_1) \cup E(G_2)) \setminus (E(G_1) \cap E(G_2)). \end{aligned}$$

ее *глубину* (соответственно *исходящую глубину*), как максимальную длину  $(u - v)$ - (соответственно  $(v - u)$ -) путей графа  $G$ , где  $u$  — один из истоков (соответственно стоков)  $G$ . Легко видеть, что отношение достижимости является отношением частичного порядка на множестве вершин ориентированного ациклического графа и обратно.

Неориентированный связный ациклический граф называется *деревом*. Для дерева  $G$ , как известно, имеет место равенство

$$|E(G)| = |V(G)| - 1. \quad (1.3)$$

Дерево с выделенной вершиной (*корнем*) называется *корневым деревом*, а все отличные от корня вершины степени 1 этого дерева считаются его *листьями*. Ориентированный граф, который получается из корневого дерева заменой каждого его неориентированного ребра на соответствующую дугу, «направленную» к корню, называется *ориентированным деревом*.

Дерево (ориентированное дерево)  $\mathcal{D}$ , являющееся остовным подграфом графа  $G$ , называется его *остовным поддеревом*, а дерево  $\mathcal{D}'$ , получающееся из  $\mathcal{D}$  в результате присоединения «конечной» вершины любого не вошедшего в  $\mathcal{D}$  ребра графа  $G$  к той же вершине  $\mathcal{D}$ , которая была его конечной вершиной в  $G$ , и объявления начальной вершины этого ребра листом — *остовным наддеревом* графа  $G$ . Очевидно, что при этом граф  $G$  может быть получен из дерева  $\mathcal{D}'$  в результате присоединения некоторых вершин степени 1 (листьев) к другим его вершинам. Заметим, что любой неориентированный связный граф, а также любой ориентированный ациклический граф с 1 стоком всегда имеют остовные поддерева и наддерева соответствующего типа.

Граф, вершинам и (или) ребрам которого сопоставлены определенные символы (пометки), считается *помеченным графом*. Примером такого графа является, в частно-

сти, корневое дерево. Другим примером помеченного графа является ациклический граф с *монотонной нумерацией вершин*, когда для любой дуги номер вершины, из которой она исходит, больше номера вершины, в которую эта дуга входит. Ориентированный граф  $G$  называется *упорядоченным*, если для любой его вершины  $v$ ,  $v \in V(G)$ , все ребра, входящие в  $v$ , упорядочены и пронумерованы числами  $1, 2, \dots, d_G^+(v)$ .

Будем считать, что ребра и вершины остовного поддерева, а также ребра связанного с ним остовного наддерева помеченного графа имеют те же самые пометки, которые они имели в исходном графе. Это означает, в частности, что остовное наддерево ориентированного ациклического упорядоченного графа является упорядоченным.

Графы  $G' = (V', E')$  и  $G'' = (V'', E'')$  называются *изоморфными*, если существуют такие взаимнооднозначные отображения  $\varphi : V' \rightarrow V''$  и  $\psi : E' \rightarrow E''$ , при которых вершины и неориентированные ребра (дуги)  $G'$  переходят в вершины и неориентированные ребра (соответственно дуги)  $G''$  с сохранением отношения инцидентности (соответственно исхода, захода) вершин и ребер, а также всех пометок. Для (конечного) множества графов  $\mathcal{G}$  через  $|\mathcal{G}|$  будем обозначать число попарно неизоморфных графов в  $\mathcal{G}$ . Известно, что

$$|\mathfrak{D}(q)| \leq 4^q, \quad (1.4)$$

где  $\mathfrak{D}(q)$  — множество упорядоченных ориентированных корневых деревьев с не более, чем  $q$  ребрами.

Введем теперь общие определения и обозначения, связанные с сетями и «абстрактными» схемами, с реализацией ими функций, а также с некоторыми структурными представлениями схем.

Набор вида  $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$ , где  $G$  — граф, а  $V'$  и  $V''$  — выборки из множества  $V(G)$  длины  $p$  и  $q$  соответственно,

причем выборка  $V'$  является выборкой без повторений, называется  $(p, q)$ -сетью. При этом выборка  $V'$  (выборка  $V''$ ) считается *входной* (соответственно *выходной*) *выборкой*, а ее  $i$ -я вершина называется  $i$ -м *входным* (соответственно *выходным*) *полюсом* или, иначе,  $i$ -м *входом* (соответственно *выходом*) сети  $\mathcal{G}$ . Вершины, не участвующие во входной и выходной выборках сети, считаются ее *внутренними* вершинами.

Для того чтобы выделить входную и выходную выборки сети  $\mathcal{G} = (G; V', V'')$ , будем записывать ее в виде  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V'; V'')$  или  $\mathcal{G} = G(V'; V'')$ . Сеть, в которой входная и выходная выборки совпадают (не совпадают), называется *сетью с неразделенными* (соответственно *с разделенными*) *полюсами*. При этом в случае неразделенных полюсов сеть  $\mathcal{G} = (G; V; V) = \mathcal{G}(V; V)$  будем записывать в виде  $\mathcal{G} = (G; V) = \mathcal{G}(V)$ . Как правило, входы и выходы (полюса) сети имеют специальные пометки, которые отличают эти вершины от других вершин сети и указываются вместо них в соответствующих выборках. Таким образом, сети можно считать специальным частным случаем помеченных графов.

Примером сети является корневое дерево, входами которого считаются его листья, а выходом — корень. При этом порядок листьев во входной выборке ориентированного упорядоченного корневого дерева  $\mathcal{D}$  задается «естественной» нумерацией  $\tau$ , отображающей множество вершин дерева  $\mathcal{D}$  в  $\mathbb{N}$  так, что  $\tau(v') < \tau(v'')$  тогда и только тогда, когда либо  $v''$  достижима из  $v'$ , либо  $k' < k''$ , где  $k'$  и  $k''$  — номера дуг, по которым цепи, соединяющие вершины  $v'$  и  $v''$  соответственно с корнем  $\mathcal{D}$ , входят в свою первую общую вершину.

Для произвольных выборок  $V' = (v'_1, \dots, v'_p)$  и  $V'' = (v''_1, \dots, v''_q)$  из множества  $V(G)$  графа  $G$  определим *матрицу достижимости* *выборки*  $V'$  *из* *выборки*  $V''$  как матрицу

цу  $M$ ,  $M \in B^{p,q}$ , для которой

$$M \langle i, j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j'' \text{ достижима из } v_i', \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае  $V' = V''$  матрица  $M$  является рефлексивной и транзитивной<sup>1</sup>, а если, кроме того,  $G$  — неориентированный граф, то и симметричной матрицей. Заметим также, что транзитивность рефлексивной матрицы  $M$ ,  $M \in B^{m,m}$ , имеет место тогда и только тогда, когда<sup>2</sup>

$$M^2 = M. \quad (1.5)$$

Действительно, полагая  $\widehat{M} = M^2$ , получим

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = \bigvee_{t=1}^m M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \quad (1.6)$$

и, следовательно, в случае  $\widehat{M} = M$  неравенства транзитивности

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \geq M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle$$

будут выполнены при любых  $i, j, t$  из отрезка  $[1, m]$ . С другой стороны, из транзитивности рефлексивной матрицы  $M$ , в силу (1.6), следует, что

$$\widehat{M} \langle i, j \rangle = M \langle i, j \rangle \vee \left( \bigvee_{\substack{1 \leq t \leq m \\ t \neq i, j}} M \langle i, j \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \right) = M \langle i, j \rangle.$$

<sup>1</sup>Матрица  $M$ ,  $M \in B^{m,m}$ , считается рефлексивной (транзитивной) тогда и только тогда, когда она задает рефлексивное (соответственно транзитивное) отношение на множестве  $[1, m]$ , то есть

$$M \langle i, i \rangle = 1 \quad (\text{соответственно } M \langle i, t \rangle \cdot M \langle t, j \rangle \geq M \langle i, j \rangle)$$

для любого  $i$  (соответственно любых  $i, j$  и  $t$ ) из отрезка  $[1, m]$ .

<sup>2</sup>Считаем, что при умножении матриц из 0 и 1 вместо операции сложения используется операция дизъюнкции.

Матрица достижимости выходной выборки сети из ее входной выборки называется *матрицей достижимости* этой сети.

Под «абстрактной» схемой понимается сеть, часть пометок которой составляют входные переменные и в каждой вершине которой реализуется функция (столбец из функций) от этих переменных. При этом считается, что сама схема реализует систему (матрицу), состоящую из функций (соответственно столбцов функций), реализованных на ее выходах. В качестве выходных пометок схемы используются, как правило, специальные выходные переменные, а схема  $\Sigma$  с входными переменными (входами)  $x_1, \dots, x_n$  и выходными переменными  $z_1, \dots, z_m$  записывается в виде  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$ .

Номер  $\nu(\alpha)$  набора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  из  $B^n$  считается номером ЭК (ЭД) ранга  $n$  от БП  $X(n)$  вида  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  (соответственно  $x_1^{\alpha_1} \vee \dots \vee x_n^{\alpha_n}$ ), множество всех таких ФАЛ обозначается  $Q_n$  (соответственно  $J_n$ ), а система из всех указанных ФАЛ, упорядоченных по их номерам, называется *конъюнктивным* (соответственно *дизъюнктивным*) *дешифратором* порядка  $n$  от БП  $x_1, \dots, x_n$  и обозначается через  $\vec{Q}_n$  (соответственно  $\vec{J}_n$ ). Функция вида

$$\mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_{\nu(\alpha)}$$

называется *мультиплексорной функцией*, или, иначе, *мультиплексором* порядка  $n$ , а переменные  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ( $y = (y_0, \dots, y_{2^n-1})$ ) считаются *адресными* (соответственно *информационными*) БП мультиплексора  $\mu_n$ .

Мультиплексорную ФАЛ порядка  $(n - q)$ ,  $0 \leq q < n$ , от адресных БП  $x'' = (x_{q+1}, \dots, x_n)$  и информационных БП  $y = (y_0, \dots, y_{2^{n-q}-1})$  часто используют для разложения произвольной ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$  по БП  $x''$  (см. разложение Шеннона (2.5) из §2 главы 1).

Схему, которая реализует систему ФАЛ  $Q_n (J_n, \mu_n)$  будем называть *дешифратором* (соответственно *дизъюнктивным дешифратором, мультиплексором*) *порядка  $n$* . Схемы, реализующие равные системы функций, называются *эквивалентными*. Предполагается, что изоморфные схемы всегда эквивалентны, и поэтому для любого конечного множества схем  $\mathcal{U}$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}\| \leq |\mathcal{U}|, \quad (1.7)$$

где  $\|\mathcal{U}\|$  — число попарно не эквивалентных схем в  $\mathcal{U}$ .

## §2 Формулы, их структура, эквивалентность и способы задания. Оптимизация подобных формул по глубине

В §1 главы 1 дано индуктивное определение формулы и реализуемой ею функции. Напомним его и рассмотрим способ представления формул алгебры логики с помощью ориентированных упорядоченных деревьев.

Пусть, по-прежнему,  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  — счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть  $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$  — базис, где ФАЛ  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ , зависит от  $k_i$ ,  $k_i \geq 1$ , БП и является существенной ФАЛ, если  $k_i \geq 2$ . Предполагается, что  $\mathcal{B}$  — полный базис (см. §1 главы 1) и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ. Чаще всего мы будем иметь дело с базисом  $\mathcal{B}_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ .

Любая переменная  $x_j$  из  $\mathcal{X}$  считается *формулой глубины 0* или, иначе, *тривиальной формулой над базисом  $\mathcal{B}$* , которая реализует функцию  $x_j$ . Если  $i \in [1, b]$  и для каждого  $j$ ,  $j \in [1, k_i]$ , определена формула  $\mathcal{F}_j$  глубины  $q_j$  над  $\mathcal{B}$ , которая реализует ФАЛ  $f_j$ , то запись  $\mathcal{F}$  вида

$$\mathcal{F} = \varphi_i (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}) \quad (2.1)$$

является формулой глубины  $q$  над  $B$ , где

$$q = \max \{q_1, \dots, q_{k_i}\} + 1, \quad (2.2)$$

которая реализует функцию  $f$  вида  $f = \varphi_i(f_1, \dots, f_{k_i})$ .

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются *формулами над базисом*  $B$ . При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы  $\mathcal{F}$ , называются ее *подформулами*, а те подформулы  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}$ , из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула  $\mathcal{F}$  вида (2.1), считаются ее *главными* подформулами.

Заметим, что запись подформулы  $\mathcal{F}'$  формулы  $\mathcal{F}$  является частью записи  $\mathcal{F}$ , причём каждая такая часть считается *вхождением*  $\mathcal{F}'$  в  $\mathcal{F}$  или, иначе, *позиционной подформулой* вида  $\mathcal{F}'$  формулы  $\mathcal{F}$ , а число указанных частей называется *кратностью*  $\mathcal{F}'$  в  $\mathcal{F}$ . Под *сложностью* (*рангом*) формулы  $\mathcal{F}$  понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через  $L(\mathcal{F})$  (соответственно  $R(\mathcal{F})$ ).

Напомним, что «графически» совпадающие формулы считаются *изоморфными*, а формулы  $\mathcal{F}'$  и  $\mathcal{F}''$ , реализующие равные функции  $f'$  и  $f''$ , называются *равными* или, иначе, *эквивалентными*. При этом равенство вида  $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$  считается *тождеством*. Через  $t_\varphi^K$  и  $t_\varphi^A$  будем обозначать тождество коммутативности и тождество ассоциативности для ФАЛ  $\varphi(x_1, x_2)$ , где  $\varphi \in \{x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$  (см. §2 главы 1).

Множество всех формул над базисом  $B$  будем обозначать через  $\mathcal{U}_B^\Phi$  и положим  $\mathcal{U}_{B_0}^\Phi = \mathcal{U}^\Phi$ . Индукцией по глубине любой формуле глубины  $q$  над  $B$  можно сопоставить упорядоченное ориентированное корневое дерево глубины  $q$ , каждому листу которого приписана БП из  $\mathcal{X}$ , а каждой внутренней вершине — функциональный символ (ФС) из  $B$ . Формуле  $x_j$



глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП  $x_j$  (см. рис. 2.1a). Формуле  $\mathcal{F}$  вида (2.1) сопоставим дерево  $\mathcal{D}$  глубины  $q$ , определяемой равенством (2.2), и с корнем  $v$ , показанное на рис. 2.1b, где  $\mathcal{D}_j, j = 1, \dots, k_i$  — дерево глубины  $q_j$  с корнем  $v_j$ , которое соответствует формуле  $\mathcal{F}_j$ .

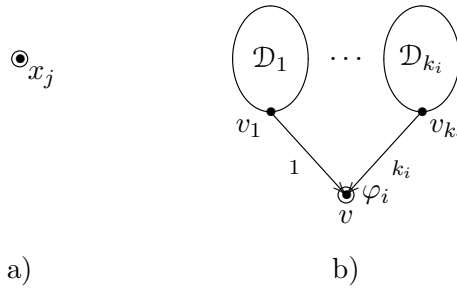


Рис. 2.1: представление формулы деревом

Заметим, что формула  $\mathcal{F}$  по сопоставленному ей дереву  $\mathcal{D}$  восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма, и что при этом поддеревья дерева  $\mathcal{D}$  взаимнооднозначно сопоставляются позиционным подформулам формулы  $\mathcal{F}$ . На рис. 2.2a показано дерево, соответствующее формуле

$$\overline{((x_1 \vee x_2) \vee x_3)} \vee (x_3 (x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2), \quad (2.3)$$

которая является формулой глубины 4 над базисом  $B_0$  и реализует ФАЛ  $s_3^{\{0,2,3\}}$ .

Для удобства будем считать, что в  $\mathcal{U}_B^\Phi$  входят не только отдельные формулы, но и упорядоченные системы (наборы) формул над базисом  $B$ , что каждая такая система реализует набор, состоящий из ФАЛ, реализуемых ее формулами, и

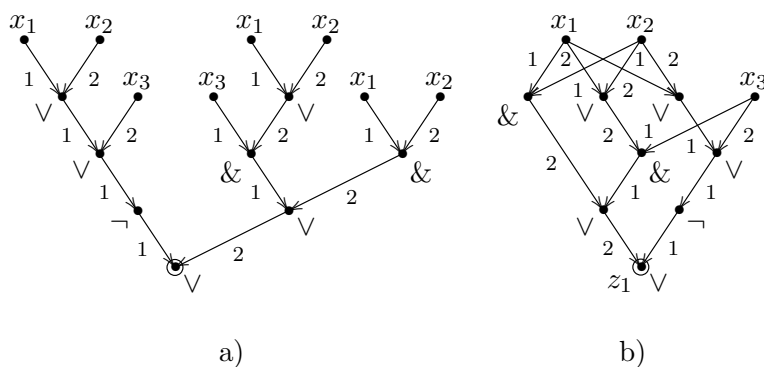


Рис. 2.2: представление формулы (2.3) деревом и квазидеревом

что этой системе формул соответствует система из деревьев, сопоставленных ее формулам.

Заметим, что ранг  $R(\mathcal{F})$  формулы  $\mathcal{F}$  равен числу листьев связанного с ней дерева  $\mathcal{D}$ , ее сложность  $L(\mathcal{F})$  равна числу остальных вершин  $\mathcal{D}$ , а ее глубина  $D(\mathcal{F})$  — глубине его корня. Заметим также, что порядок вхождения БП в запись формулы  $\mathcal{F}$  при ее просмотре слева направо соответствует последовательности появления БП на листьях связанного с ней дерева, просматриваемых в «естественном» порядке (см. §1).

Рассмотрим теперь некоторые соотношения между параметрами формул над базисом  $B_0$ . Заметим, что представляя формулы деревьями, такие соотношения можно доказывать более простым и наглядным способом.

**Лемма 2.1.** Для формулы  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$ , выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&, \vee}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})}, \quad (2.4)$$

где  $L_{\&,\vee}(\mathcal{F})$  — число ФС  $\&$  и  $\vee$  в формуле  $\mathcal{F}$ .

*Доказательство.* Сравнивая число ребер, входящих в вершины дерева (формулы)  $\mathcal{F}$  с числом ребер, выходящих из его вершин, получим

$$|E(\mathcal{F})| = 2L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + L_{\neg}(\mathcal{F}) = L(\mathcal{F}) + R(\mathcal{F}) - 1,$$

где  $L_{\neg}(\mathcal{F})$  — число ФС  $\neg$  в формуле  $\mathcal{F}$ , откуда следует, что

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&,\vee}(\mathcal{F}) + 1.$$

Второе из соотношений (2.4) легко устанавливается индукцией по  $D(\mathcal{F})$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие.**

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil. \quad (2.5)$$

Для того чтобы выделить набор  $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ , который состоит из всех различных БП алфавита  $\mathcal{X}$ , встречающихся в формуле  $\mathcal{F}$  и перечисленных в порядке возрастания их номеров, будем записывать ее в виде  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ . При этом формулу, которая получается из  $\mathcal{F}$  в результате замены каждого вхождения БП  $x_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , формулой  $\mathcal{F}_j$  будем считать *результатом подстановки формулы  $\mathcal{F}_j$  вместо БП  $x_{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в формулу  $\mathcal{F}$*  и будем обозначать ее через  $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ . Заметим, что формула  $\mathcal{F}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  реализует ФАЛ  $f(f_1, \dots, f_n)$ , где ФАЛ  $f$  (ФАЛ  $f_j$ ) — ФАЛ, реализуемая формулой  $\mathcal{F}$  (соответственно  $\mathcal{F}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ). Отсюда следует, что если указанную подстановку применить к обеим частям тождества  $t : \mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ , где  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'(x)$  и  $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}''(x)$ , мы получим тождество

$$\hat{t} : \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}'',$$

где  $\widehat{\mathcal{F}}' = \mathcal{F}'(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  и  $\widehat{\mathcal{F}}'' = \mathcal{F}''(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ , которое называется *подстановкой для тождества  $t$* .

Из определений следует, что для формул имеет место так называемый принцип эквивалентной замены. Это означает, что если позиционную подформулу вида  $\widehat{\mathcal{F}}'$  (вида  $\widehat{\mathcal{F}}''$ ) формулы  $\mathcal{F}$  заменить, учитывая тождество  $\widehat{t}$ , эквивалентной ей формулой  $\widehat{\mathcal{F}}''$  (соответственно  $\widehat{\mathcal{F}}'$ ), то полученная в результате такой замены формула  $\check{\mathcal{F}}$  будет эквивалентна формуле  $\mathcal{F}$ . Указанный переход от формулы  $\mathcal{F}$  к формуле  $\check{\mathcal{F}}$  называется (однократным) *эквивалентным преобразованием (ЭП) формулы  $\mathcal{F}$*  на основе тождества  $t$ , а последовательность однократных ЭП формулы  $\mathcal{F}$ , выполняемых на основе тождеств из системы  $\tau$ , считается её (многократным) ЭП на основе этой системы.

Формулы из  $\mathcal{U}^\Phi$ , получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств  $t_{\&}^K$  и  $t_{\vee}^K$ , а также тождеств  $t_{\&}^A$  и  $t_{\vee}^A$ , называются *подобными*. Легко видеть, что подобные формулы получают друг из друга перестановкой аргументов и изменением порядка выполнения однотипных двуместных базисных операций, образующих соответствующую многоместную операцию, и поэтому могут отличаться друг от друга только глубиной.

Заметим, что сложность характеризует время вычисления формулы на одном процессоре, а глубина — время ее параллельного вычисления на неограниченном числе процессоров. Поэтому оптимизация подобных формул по глубине является частным случаем «распараллеливания» вычислений.

Формулы из  $\mathcal{U}^\Phi$  можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств

$$t_{\&}^M : \overline{(x_1 \cdot x_2)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad t_{\vee}^M : \overline{(x_1 \vee x_2)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,$$

$$t_{\neg}^M : \overline{(x_1)} = x_1$$

— тождеств де Моргана для конъюнкции, дизъюнкции и отрицания соответственно, а также преобразований подобия. Тождество  $t_{\neg}^M$  используется при этом для устранения нескольких последовательных вхождений ФС  $\neg$  в оптимизируемой формуле, а тождества  $t_{\&}^M, t_{\vee}^M$  — для выполнения перехода

$$\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{F}_1} \circ \dots \circ \overline{\mathcal{F}_t} = \overline{(\mathcal{F}_1 \diamond \dots \diamond \mathcal{F}_t)},$$

где  $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$  и  $t \geq 2$ , во всех ее максимальных по включению подформулах вида  $\mathcal{F}'$ , формируемых с помощью преобразований подобия.

Формула, в которой все ФС  $\neg$  встречаются только над БП, называется *формулой с поднятыми отрицаниями*. Легко видеть, что с помощью тождеств де Моргана любую формулу из  $\mathcal{U}^{\Phi}$  можно преобразовать в формулу с поднятыми отрицаниями. Заметим, что преобразования подобия и эквивалентные преобразования формул на основе тождеств де Моргана не изменяют ранг этих формул и, следовательно, число ФС  $\{\&, \vee\}$  в них.

Определим альтернирование  $\text{Alt}(\mathcal{F})$  формулы  $\mathcal{F}$  с поднятыми отрицаниями как максимальное число изменений типов ФС  $\&$  и  $\vee$  в цепях дерева, соответствующего формуле  $\mathcal{F}$ . Заметим, что альтернирование ЭК или ЭД равно нулю, а альтернирование любой (отличной от ЭК и ЭД) ДНФ или КНФ равно 1.

**Теорема 2.1.** *Для любой формулы  $\mathcal{F}$  с поднятыми отрицаниями из  $\mathcal{U}^{\Phi}$  существует подобная ей формула  $\check{\mathcal{F}}$  такая, что*

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{Alt}(\mathcal{F}). \quad (2.6)$$

*Доказательство.* Доказательство проведем индукцией по рангу формулы  $\mathcal{F}$ . Если  $R(\mathcal{F}) = 1$ , то формула  $\mathcal{F}$  имеет вид  $\mathcal{F} = x_i^{\sigma}$ ,  $\sigma \in B$ , и сама удовлетворяет неравенству (2.6).

Пусть неравенство (2.6) справедливо для любой подформулы  $\mathcal{F}'$  такой, что  $R(\mathcal{F}') \leq r - 1$ , где  $r \geq 2$ , и пусть формула  $\mathcal{F}$  имеет ранг  $r$  и альтернирование  $a$ . Представим формулу  $\mathcal{F}$  в виде:

$$\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t),$$

где  $t \geq 2$ , формула  $\Phi(y_1, \dots, y_t)$  при некотором  $\circ, \circ \in \{\&, \vee\}$ , имеет вид  $y_1 \circ \dots \circ y_t$ , альтернирование подформул  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_t$  формулы  $\mathcal{F}$  не больше, чем  $a'$ , где  $a' = \max\{0, (a - 1)\}$ , а их ранг не превосходит  $(r - 1)$ . Положим

$$d = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a - a' \quad \text{и} \quad d_i = \lceil \log(L(\mathcal{F}_i) + 1) \rceil,$$

где  $i = 1, \dots, t$ , а затем для каждой формулы  $\mathcal{F}_i$  построим по индуктивному предположению подобную ей формулу  $\check{\mathcal{F}}_i$  такую, что

$$D(\check{\mathcal{F}}_i) \leq d_i + a'.$$

Заметим, что при этом

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} \leq 2^d. \quad (2.7)$$

Действительно, если  $a - a' = 1$ , то

$$2^d \geq 2(L(\mathcal{F}) + 1) = \sum_{i=1}^t 2(L(\mathcal{F}_i) + 1) \geq \sum_{i=1}^t 2^{d_i},$$

а если  $a = a' = 0$ , то  $\mathcal{F} = x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_t^{\sigma_t}$  и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^t 2^{d_i} = \sum_{i=1}^t (L(x_i^{\sigma_i}) + 1) = L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^d.$$

Заметим также, что перенумерацией формул  $\check{\mathcal{F}}_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ , можно добиться выполнения неравенств:

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_t. \quad (2.8)$$

Пусть теперь  $\Phi'$  — формула вида  $y_1 \circ \dots \circ y_{2^d}$ , которой соответствует полное двоичное  $d$ -ярусное дерево, а формула  $\Phi''$  получается из  $\Phi'$  удалением последних  $q$ , где  $q = (2^d - 2^{d_1} - \dots - 2^{d_t})$  и  $q \geq 0$  в силу (2.7), вхождений БП вместе с теми ФС, которые с ними связаны. В силу (2.8) первые  $2^{d_1}$  вхождений БП в  $\Phi''$  составляют подформулу  $\Phi_1$ , которой соответствует полное двоичное  $d_1$ -ярусное дерево, содержащее  $2^{d_1}$  вхождений БП в  $\Phi''$ , следующие  $2^{d_2}$  вхождений БП в  $\Phi''$  — подформулу  $\Phi_2$ , которой соответствует полное двоичное  $d_2$ -ярусное дерево, и так далее, вплоть до последних  $2^{d_t}$  вхождений БП в  $\Phi''$ , составляющих подформулу  $\Phi_t$ , которой соответствует полное двоичное  $d_t$ -ярусное дерево.

Обозначим через  $\check{\mathcal{F}}$  формулу, которая получается из  $\Phi''$  заменой подформулы  $\Phi_i$  на формулу  $\check{\mathcal{F}}_i$ ,  $i = 1, \dots, t$ . Заметим, что  $\check{\mathcal{F}}$  подобна  $\mathcal{F}$ , имеет глубину не больше, чем

$$d + a' = \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + a,$$

и поэтому удовлетворяет неравенству (2.6).

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** *Для любой ЭК или ЭД  $K$  существует подобная формула  $\check{K}$  такая, что*

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil, \quad (2.9)$$

которая, в силу леммы 2.1, минимальна по глубине.

**Следствие 2.** *Для любой ДНФ или КНФ  $\mathfrak{A}$  существует подобная ей формула  $\check{\mathfrak{A}}$  такая, что*

$$D(\check{\mathfrak{A}}) \leq \lceil \log(L(\mathfrak{A}) + 1) \rceil + 1.$$

*Замечание.* Доказательство теоремы дает индуктивный метод оптимизации формул с поднятыми отрицаниями по глубине с помощью преобразований подобия.

### §3 Задание формул графами, схемы из функциональных элементов. Оценка числа формул и схем в базисе $\{\& , \vee , \neg\}$

Рассмотрим теперь более общую по сравнению с формулами модель — модель схем из функциональных элементов (СФЭ), в которой последовательность операций суперпозиции базисных ФАЛ задается с помощью ориентированного ациклического графа, обобщающего дерево, и где возможно многократное использование промежуточных результатов. По существу СФЭ получается из системы деревьев (системы формул) в результате отождествления некоторых изоморфных поддеревьев (совпадающих подформул).

Пусть  $\mathcal{Z}$  — счетный упорядоченный алфавит (выходных) БП, который не имеет общих БП с алфавитом  $\mathcal{X}$ . Сопоставим каждому функциональному символу (ФС)  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, b$ , функциональный элемент (ФЭ)  $\mathcal{E}_i$ , имеющий  $k_i$  входов, причем входу с номером  $j$  соответствует  $j$ -я БП  $x_j$  ФАЛ  $\varphi_i$ , где  $j = 1, \dots, k_i$ , и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется (см. рис. 3.1a). Упрощенный вариант изображения ФЭ  $\mathcal{E}_i$  в виде вершины графа с пометкой  $\varphi_i$ , в которую входят  $k_i$  упорядоченных, то есть пронумерованных числами  $1, \dots, k_i$  дуг, показан на рис. 3.1b. При этом предполагается, что дуга с номером  $j$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , соответствует  $j$ -му входу ФЭ  $\mathcal{E}_i$ . В дальнейшем мы, как правило, не будем делать различий между функциональным символом  $\varphi_i$  и функциональным элементом  $\mathcal{E}_i$ .

**Определение.** *Схемой из функциональных элементов над базисом  $\mathcal{B}$  называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть  $\Sigma$ , входная выборка которой состоит из всех истоков  $\Sigma$ , а вершины помечены следующим образом:*

1. каждому входу (выходу)  $\Sigma$  сопоставлена БП из  $\mathcal{X}$  (соответственно  $\mathcal{Z}$ ), являющаяся пометкой связанной с



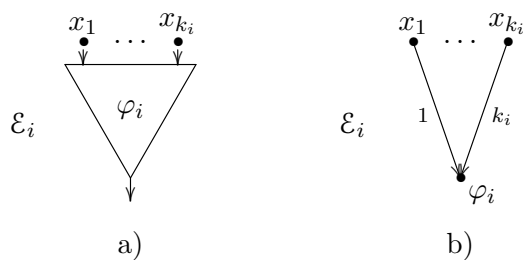


Рис. 3.1: функциональный элемент  $\mathcal{E}_i$

ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках  $\Sigma$  определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;

2. каждая отличная от истока вершина  $v$  схемы  $\Sigma$  помечена ФС  $\varphi_i$ , где  $k_i = d_{\Sigma}^+(v)$ .

Заметим, что в общем случае вершины в выходной выборке СФЭ могут повторяться, то есть одной и той же выходной вершине может быть сопоставлено несколько БП из  $\mathcal{Z}$ . Если множество  $X = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$  ( $Z = \{z_{j_1}, \dots, z_{j_m}\}$ ) состоит из всех входных (соответственно выходных) БП СФЭ  $\Sigma$ , перечисленных в порядке возрастания их номеров в алфавите  $\mathcal{X}$  (соответственно  $\mathcal{Z}$ ), то, в соответствии с §1, будем записывать СФЭ  $\Sigma$  в виде  $\Sigma = \Sigma(X; Z)$  или  $\Sigma = \Sigma(x; z)$ , где  $x = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  и  $z = (z_{j_1}, \dots, z_{j_m})$  — наборы БП, соответствующие множествам  $X$  и  $Z$ .

Схема  $\Sigma$ , которая получается из дерева  $\mathcal{D}$ , связанного с формулой  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}^{\Phi}$ , в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из  $\mathcal{Z}$ , называется *квазидеревом, соответствующим формуле  $\mathcal{F}$* . Заметим, что указанное квазидерево  $\Sigma$  одно-

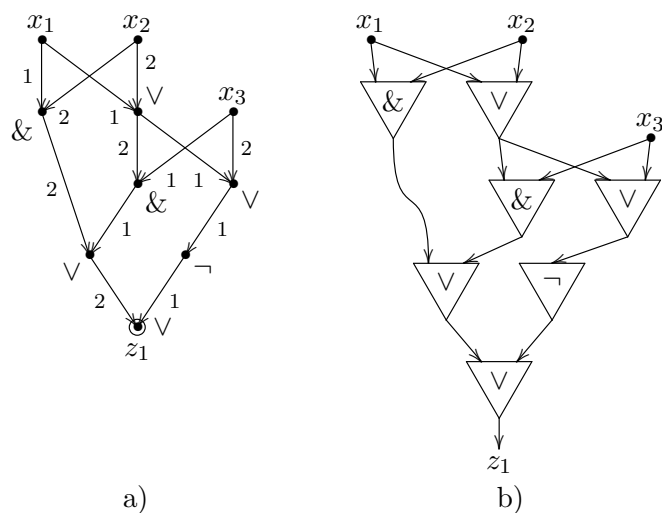


Рис. 3.2: СФЭ, полученная из квазидерева на рис. 2.2b

значно определяет формулу  $\mathcal{F}$  и является СФЭ над базисом  $\mathcal{B}$ . Из этого квазидерева путем «отождествления» (наложения) его изоморфных квазиподдеревьев можно получать и другие СФЭ, задающие формулу  $\mathcal{F}$ . На рис. 2.2b показано квазидерево над базисом  $\mathcal{B}_0$  с входными БП  $x_1, x_2, x_3$  и выходной БП  $z_1$ , которое получено из дерева, сопоставленного формуле (2.3) и изображенного на рис. 2.2a. На рис. 3.2a приведена СФЭ, полученная из данного квазидерева в результате отождествления двух его изоморфных квазиподдеревьев, а на рис. 3.2b дано более «наглядное» изображение этой СФЭ в виде системы соединенных соответствующим образом ФЭ.

Обозначим через  $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  множество всех СФЭ над базисом  $\mathcal{B}$ , и пусть  $\mathcal{U}^{\mathcal{C}} = \mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{C}}$ . Заметим, что система квазидеревьев с общими входами, соответствующая системе формул над

базисом  $B$ , является СФЭ над  $B$ , если выходам этих квазидеревьев приписаны различные выходные БП. В связи с этим формулы над  $B$  и их системы будем считать частным случаем СФЭ над  $B$ , полагая, что имеет место включение  $\mathcal{U}_B^\Phi \subseteq \mathcal{U}_B^C$ . Заметим также, что СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$ , входит в  $\mathcal{U}_B^\Phi$  тогда и только тогда, когда все стоки  $\Sigma$ , и только они, являются ее выходами, а из каждой вершины  $\Sigma$ , отличной от ее входов и выходов, исходит одна дуга.

Определим теперь функционирование СФЭ  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m)$  над базисом  $B$ . Сначала индукцией по  $q$ ,  $q = 0, 1, \dots$ , определим для каждой вершины  $v$  глубины  $q$  в схеме  $\Sigma$  реализуемую в ней формулу  $\mathcal{F}_v = \mathcal{F}_v(x_1, \dots, x_n)$  глубины  $q$  над базисом  $B$ . Если  $q = 0$ , то есть  $v$  — вход  $\Sigma$ , положим  $\mathcal{F}_v = x_j$ , где  $x_j$  — входная БП, сопоставленная вершине  $v$ . Пусть теперь  $v$  — вершина глубины  $q$ ,  $q \geq 1$ , схемы  $\Sigma$ , которая имеет пометку  $\varphi_i$  и в которую входит  $k_i$  дуг, причем дуга с номером  $j$ ,  $1 \leq j \leq k_i$ , исходит из вершины  $v_j$  глубины  $q_j$ , где уже реализована формула  $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_{v_j}$  глубины  $q_j$ , а для чисел  $q, q_1, \dots, q_{k_i}$  выполнено (2.2). Тогда в вершине  $v$  реализуется формула  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_v$  вида (2.1), которая имеет глубину  $q$ . При этом считается, что в вершине  $v$  СФЭ  $\Sigma$  реализуется ФАЛ  $f(x_1, \dots, x_n)$ , если ФАЛ  $f$  реализуется формулой  $\mathcal{F}_v$ , и что СФЭ  $\Sigma$  реализует систему ФАЛ  $F$ ,  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , или реализует систему булевых уравнений  $z_1 = f_1, \dots, z_m = f_m$ , если  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , — ФАЛ, реализованная в той выходной вершине СФЭ  $\Sigma$ , которой приписана БП  $z_j$ .

Заметим, что квазидерево, которое соответствует формуле  $\mathcal{F}$ , реализующей ФАЛ  $f$ , а также любая СФЭ, полученная из него отождествлением изоморфных квазиподдеревьев, реализует и формулу  $\mathcal{F}$ , и ФАЛ  $f$ . Так, СФЭ на рис. 3.2 реализует формулу (2.3) и ФАЛ  $s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$ , или уравнение  $z_1 = s_3^{\{0,2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$ .

В соответствии с §1 две СФЭ считаются изоморфными, если они изоморфны как помеченные графы, и эквивалентными, если они реализуют равные системы ФАЛ. Заметим, что СФЭ всегда эквивалентна системе формул, реализуемых ею на своих выходах. Заметим также, что изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину  $v$  СФЭ  $\Sigma$ , которой сопоставлен ФЭ  $\mathcal{E}_i$  с симметрической ФАЛ  $\varphi_i$ , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине  $v$ , а значит, не влияет на функционирование  $\Sigma$ . Схемы, получающиеся друг из друга в результате указанных преобразований, называются *квази-изоморфными*, а номера дуг, входящих в вершину  $v$  с симметрической ФАЛ, как правило, не указываются. Легко видеть, что в соответствующих друг другу вершинах изоморфных (квазиизоморфных) СФЭ реализуются одинаковые (соответственно подобные) формулы, а значит, и одинаковые ФАЛ. Следовательно, две изоморфные (квазиизоморфные) СФЭ эквивалентны, то есть для СФЭ справедливо неравенство (1.7).

Вершина СФЭ называется *висячей*, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется *приведенной*, если в ней нет висячих вершин. Заметим, что система формул является приведенной СФЭ, и что из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей приведенную СФЭ с помощью операции *удаления висячих вершин*. Заметим также, что приведенные СФЭ, и только они, получаются из систем квазидеревьев в результате отождествления некоторых изоморфных квазиподдеревьев, и что в приведенных СФЭ все вершины лежат на цепях, идущих от входов схемы к ее выходам.

Также как и для формул, для каждой СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}_B^C$ , определим следующие параметры (функционалы сложности):

1.  $L(\Sigma)$  — сложность  $\Sigma$ , то есть число всех ее ФЭ;

2.  $D(\Sigma)$  — глубина  $\Sigma$ , то есть максимальная глубина ее вершин.
3.  $R(\Sigma)$  — ранг  $\Sigma$ , то есть число дуг, исходящих из ее входов.

Лемма 2.1 обобщается для СФЭ следующим образом.

**Лемма 3.1.** *Для приведенной СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}^C$ , с одним выходом, выполняются неравенства*

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)}, \quad (3.1)$$

где  $L_{\&, \vee}$  — число ФЭ  $\&$  и  $\vee$  в  $\Sigma$ .

С содержательной точки зрения различные функционалы сложности отражают различные параметры моделируемых схем или программ. Так, например, сложность может характеризовать стоимость, размеры или потребляемую мощность СБИС, а также время выполнения программы на одном процессоре. При этом задержка схемы характеризует время срабатывания СБИС или время выполнения программы на параллельных процессорах. Ранг схемы отражает число обращений программы к памяти, в которой хранятся значения входных БП и т.п.

Обозначим через  $\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)$  и  $\mathcal{U}_B^\Phi[D, n]$  множество формул  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$  над базисом  $B$ , для которых  $L(\mathcal{F}) \leq L$  и  $D(\mathcal{F}) \leq D$ , причем индекс  $B_0$  будем, как обычно, опускать. Заметим, что из неравенства (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{U}^\Phi[D, n] \subseteq \mathcal{U}^\Phi(2^D - 1, n). \quad (3.2)$$

**Лемма 3.2.** *Для любых натуральных  $n, L, D$  выполняются неравенства*

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (10n)^{L+1}, \quad (3.3)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}, \quad (3.4)$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}. \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Оценим сверху число попарно не изоморфных (попарно не квазиизоморфных) формул во множестве  $U^\Phi(L, n)$ . Для того, чтобы задать с точностью до изоморфизма упорядоченное дерево  $\mathcal{D}$ , соответствующее формуле  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi(L, n)$ , достаточно:

1. выбрать упорядоченное двоичное корневое дерево  $\mathcal{D}'$  с  $q$ ,  $q \leq L$ , нелистовыми вершинами, в котором вершины с полустепенью захода 2 помечены ФС  $\&$ ,  $\vee$ ;
2. каждый исток  $\mathcal{D}'$  пометить одной из БП  $x_1, \dots, x_n$ , а вершины с полустепенью захода 1 — ФС  $\neg$ .

Пронумеруем множество нелистовых вершин дерева  $\mathcal{D}'$  числами  $1, 2, \dots, q$  в обратном относительно естественной нумерации  $\tau$  (см. §1) порядке и сопоставим каждой такой вершине  $v$  с полустепенью захода  $d$ ,  $d \in [1, 2]$  набор  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^d$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  и  $\alpha_j = 1$  тогда и только тогда, когда дуга с номером  $j$ , входящая в  $v$ , начинается с листа дерева  $\mathcal{D}'$ . Заметим, что набор  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_L)$ , где  $\gamma_i$  — набор, сопоставленный вершине с номером  $i$ , если  $1 \leq i \leq q$ , и произвольный набор из объединения  $B^1 \cup B^2$  в случае  $i > q$ , а также набор ФС  $\&$  и  $\vee$ , приписанных тем вершинам  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq L$ , для которых  $\gamma_i \in B^2$ , однозначно определяет дерево  $\mathcal{D}'$  с точностью до изоморфизма.

Следовательно, число упорядоченных деревьев  $\mathcal{D}'$  рассматриваемого вида не больше, чем  $10^L$ , а число получаемых из него деревьев  $\mathcal{D}$  не больше, чем  $n^{L+1}$ , так как в силу леммы 2.1

$$R(\mathcal{F}) \leq L + 1.$$

Перемножая указанные числа, получаем оценку (3.3). Оценка (3.4) доказывается аналогично с учетом того, что при снятии нумерации с дуг дерева  $\mathcal{D}'$ , то есть при рассмотрении формул с точностью до квазиизоморфизма, двоичные наборы длины 2, сопоставленные его вершинам, можно выби-

рять из множества  $\{(00), (01), (11)\}$  и поэтому число неупорядоченных деревьев  $\mathcal{D}'$  рассматриваемого вида не больше, чем  $8^L$ .

Неравенство (3.5) вытекает из (3.4) и (3.2).

Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями от БП  $X(n)$  ранга не больше, чем  $R$ , не превосходит  $(12n)^R$ .

Действительно, сопоставим формуле  $\mathcal{F}$  указанного вида формулу  $\mathcal{F}'$  из  $\mathcal{U}_{\{\&, \vee\}}^\Phi$  от БП  $x_1, \dots, x_{2n}$ , которая получается из  $\mathcal{F}$  заменой каждой её подформулы  $\bar{x}_i$ ,  $i \in [1, n]$ , формулой  $x_{i+n}$  и для которой, в силу (2.4)

$$L(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}) - 1 \leq L - 1.$$

С учётом этих соотношений из доказательства леммы вытекает, что число попарно не квазиизоморфных формул вида  $\mathcal{F}'$ , которое, очевидно, равно искомому числу, не больше, чем  $(12n)^R$ .

**Лемма 3.3.** Для любых натуральных  $n$  и  $L$  выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L+n))^{L+1}. \quad (3.6)$$

*Доказательство.* Заметим, что для того, чтобы задать СФЭ  $\Sigma$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}^C(L, n)$ , с точностью до квазиизоморфизма достаточно:

1. выбрать её остовное неупорядоченное наддерево  $\mathcal{D}'$  с  $q$ ,  $q \leq L$ , нелистовыми вершинами, которые помечены ФС базиса  $B_0$ ;
2. присоединить каждый лист  $\mathcal{D}'$  либо к одному из  $n$  входов  $\Sigma$ , либо к одной из нелистовых вершин  $\mathcal{D}'$ , отличной от корня.

Оценка (3.6) получается из приведенной в лемме 3.2 оценки числа деревьев  $\mathcal{D}'$  и оценки числа способов присоединения каждого листа  $\mathcal{D}'$  путем их перемножения.

Лемма доказана.  $\square$

#### §4 Контактные схемы и $\pi$ -схемы, оценка их числа. Особенности функционирования многополюсных схем

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §3), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой  $x_i$  ( $\bar{x}_i$ ) называется *закрывающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП  $x_i$  (см. рис. 4.1).

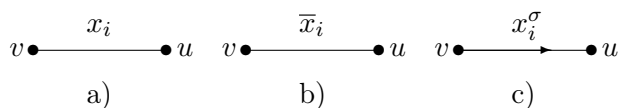


Рис. 4.1: типы контактов

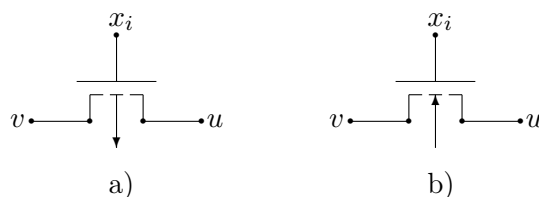


Рис. 4.2: физическая интерпретация контактов

Считается, что контакт вида  $x_i^\sigma$ ,  $\sigma \in \{0, 1\}$ , проводит

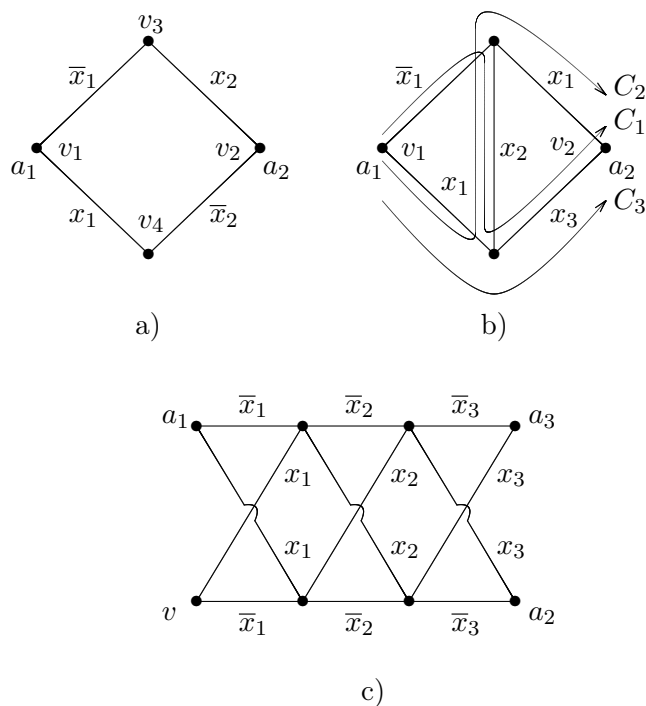


тогда и только тогда, когда  $x_i = \sigma$ , причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

С точки зрения управления проводимостью неориентированный размыкающий (замыкающий) контакт БП  $x_i$  функционирует как  $p$ -МОП (соответственно  $n$ -МОП) транзистор, на затвор которого поступает БП  $x_i$  (см. рис. 4.2а и 4.2б), а аналогичный ориентированный контакт — как МОП-транзистор соответствующего типа с диодом Шоттки [17, 23]. Кроме того, ориентированный контакт вида  $x_i^\sigma$ , идущий из вершины  $v$  в вершину  $u$  (см. рис. 4.1с), часто рассматривают как команду условного перехода из  $v$  в  $u$ , который выполняется, если  $x_i = \sigma$ .

Сеть  $\Sigma$  с входами  $a'_1, \dots, a'_p$  и выходами  $a''_1, \dots, a''_q$ , в которой все ребра (дуги) помечены переменными  $x_1, \dots, x_n$  или их отрицаниями  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ , называется  $(p, q)$ -контактной схемой (КС) от БП  $x_1, \dots, x_n$  и обозначается  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$  или  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$ . При этом число контактов называется сложностью КС  $\Sigma$  и обозначается через  $L(\Sigma)$ . На рис. 4.3а–с показаны некоторые конкретные КС от БП  $x_1, x_2, x_3$  с входом  $a_1$  и выходами  $a_2, a_3$ .

Пусть  $\Sigma$  — КС от БП  $X(n)$  и  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — набор из  $B^n$ . Определим сеть  $\Sigma|_\alpha$  как сеть, получающуюся из  $\Sigma$  в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками  $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$ , то есть ребер, которые не проводят на наборе  $\alpha$ , и снятия пометок с остальных ребер  $\Sigma$ . Для вершин  $v$  и  $u$  КС  $\Sigma$  введем функцию проводимости от вершины  $v$  к вершине  $u$  как ФАЛ  $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ , которая равна 1 на наборе  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$  тогда и только тогда, когда в сети  $\Sigma|_\alpha$  существует  $(v - u)$ -цепь, то есть тогда и только тогда, когда в  $\Sigma$  имеется цепь из проводящих на наборе  $\alpha$  контактов вида  $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ , идущая из  $v$  в  $u$ . Будем говорить также, что ФАЛ  $g_{v,u}$  является функцией достижи-

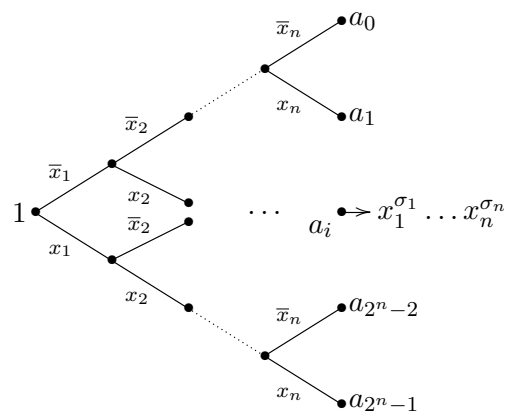
Рис. 4.3: некоторые КС от БП  $x_1, x_2, x_3$ 

мости вершины  $u$  из вершины  $v$ , или, иначе, реализуется между вершинами  $v$  и  $u$ . Из определения следует, что для нахождения ФАЛ  $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$  достаточно просмотреть все наборы  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , и для каждого из них выяснить наличие или отсутствие в  $\Sigma$  цепи, состоящей из проводящих на наборе  $\alpha$  контактов, которая идет из  $v$  в  $u$ . Так, просматривая все наборы значений БП  $x_1, x_2$ , можно убедиться в том, что ФАЛ проводимости  $g_{v_1, v_2}(x_1, x_2)$  в КС  $\Sigma$ , показанной на рис. 4.3а, равна  $x_1 \oplus x_2$ , а ФАЛ проводимости  $g_{v_3, v_4}$  равна 0.

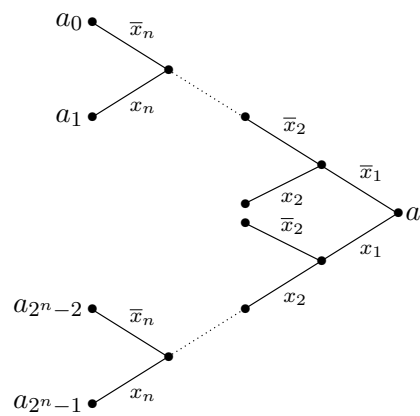
Будем считать, что в каждой вершине  $(1, m)$ -КС  $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2, \dots, a_{m+1})$  реализуется ФАЛ проводимости от входа  $a_1$  к этой вершине и что  $\Sigma$  реализует систему ФАЛ  $F = (f_1, \dots, f_m)$ , где  $f_j$  — ФАЛ проводимости от  $a_1$  к выходу с пометкой  $a_{j+1}$ ,  $j \in [1, m]$ . При этом, очевидно, в вершине  $a_1$  реализуется ФАЛ 1, которую в дальнейшем по умолчанию будем использовать в качестве пометки единственного входа  $(1, m)$ -КС. Так, КС, изображенные на рис. 4.3а, 4.3б и 4.3с, реализуют ФАЛ  $x_1 \oplus x_2$ ,  $H(x_1, x_2, x_3)$  и набор ФАЛ  $(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$  соответственно. На рис. 4.4а показана  $(1, 2^n)$ -КС  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; 1; a_0, \dots, a_{2^n-1})$ , которая называется  $(1, 2^n)$ -контактным деревом порядка  $n$  от БП  $X(n)$ . Легко видеть, что в выходной вершине  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ , этого контактного дерева (КД) реализуется ЭК вида  $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ , где  $\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (i - 1)$ , и что ФАЛ проводимости между любыми его выходами равна 0. Таким образом,  $(1, 2^n)$ -КД порядка  $n$  является дешифратором порядка  $n$ , то есть схемой, реализующей систему  $Q_n$  из всех ЭК ранга  $n$  от БП  $X(n)$ .

Схемы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  считаются, как обычно, *изоморфными*, если изоморфны соответствующие им графы, и *эквивалентными*, если они реализуют равные системы ФАЛ. Изоморфные КС, очевидно, эквивалентны.

Для множества  $C$ , состоящего из контактов вида  $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$  в КС  $\Sigma$ , определим его *функцию проводимости*  $K(C)$  и *функцию отделимости*  $J(C)$  как ФАЛ вида  $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_r}^{\sigma_r}$  и  $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$  соответственно. При этом множество  $C$  называется *проводящим (отделимым)*, если  $K(C) \neq 0$  ( $J(C) \neq 1$ ), и *нулевым* (соответственно *единичным*) в противном случае. Заметим, что в результате приведения подобных (см. §3) отличная от 0 ФАЛ  $K(C)$  и отличная от 1 ФАЛ  $J(C)$  могут быть преобразованы в ЭК и



а)



б)

Рис. 4.4:  $(1, 2^n)$ - и  $(2^n, 1)$ - контактные деревья порядка  $n$

ЭД соответственно. Очевидно, также, что

$$K(C') \geq K(C) \quad \text{и} \quad J(C') \leq J(C),$$

если  $C' \subseteq C$ .

Из введенных определений (см. также §1) следует, что ФАЛ  $g$ , реализуемая КС  $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$ , обращается в 1 (обращается в 0) на наборе  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , тогда и только тогда, когда в  $\Sigma$  существует множество контактов  $C$ , образующее простую проводящую  $(a_1 - a_2)$ -цепь (соответственно тупиковое отделимое  $(a_1|a_2)$ -сечение), для которого  $K(C) = 1$  (соответственно  $J(C) = 0$ ) на наборе  $\alpha$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) &= K(C_1) \vee \dots \vee K(C_t) = \\ &= J(S_1) \& \dots \& J(S_r), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $C_1, \dots, C_t$  и  $S_1, \dots, S_r$  — все простые проводящие  $(a_1 - a_2)$ -цепи и все тупиковые отделимые  $(a_1|a_2)$ -сечения КС  $\Sigma$ .

Заметим, что первая из формул (4.1) может быть преобразована в ДНФ, а вторая — в КНФ, в результате приведения подобных (см. §3), если  $g \neq 0$  и  $g \neq 1$  соответственно. Так, в КС, показанной на рис. 4.3b, имеются три простые проводящие цепи  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , которые идут из  $a_1$  в  $a_2$ . При этом

$$K(C_1) = \bar{x}_1 x_2 x_3, \quad K(C_2) = x_1 x_2 x_1 = x_1 x_2, \quad K(C_3) = x_1 x_3$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \\ &= x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1 = H(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь параллельно-последовательные или, иначе,  $\pi$ -схемы, которые являются частным случаем КС.

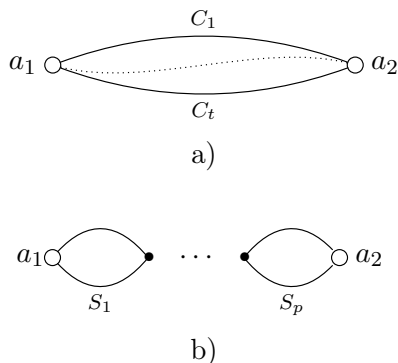


Рис. 4.5: КС, моделирующие ДНФ и КНФ

Простейшей  $\pi$ -схемой считается любая  $(1, 1)$ -КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 4.6а). Если  $\pi$ -схемы  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  уже определены, то  $(1, 1)$ -КС  $\Sigma'$  ( $\Sigma''$ ), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 4.6б и 4.6с) тоже является  $\pi$ -схемой. Заметим, что при этом вход (выход)  $\Sigma'$  является результатом отождествления входов (соответственно выходов)  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , тогда как входом  $\Sigma''$  является вход  $\Sigma_1$ , выходом  $\Sigma''$  — выход  $\Sigma_2$ , а выход  $\Sigma_1$  отождествляется с входом  $\Sigma_2$  и становится внутренней вершиной  $\Sigma''$ . Легко видеть, что  $\pi$ -схема, показанная на рис. 4.6а, реализует ФАЛ  $x_i^{\sigma}$ , а  $\pi$ -схемы  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  (см. рис. 4.6б и 4.6с) — ФАЛ  $f_1 \vee f_2$  и  $f_1 \& f_2$  соответственно, где  $f_1$  и  $f_2$  — ФАЛ, реализуемые  $\pi$ -схемами  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  соответственно.

**Лемма 4.1.** *Любой  $\pi$ -схеме  $\Sigma$  можно сопоставить эквивалентную ей формулу  $\mathcal{F}$  из  $\mathcal{U}^{\Phi}$  с поднятыми отрицаниями такую, что  $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$  и обратно.*

*Доказательство.* Построим формулу  $\mathcal{F}$  индукцией по стро-

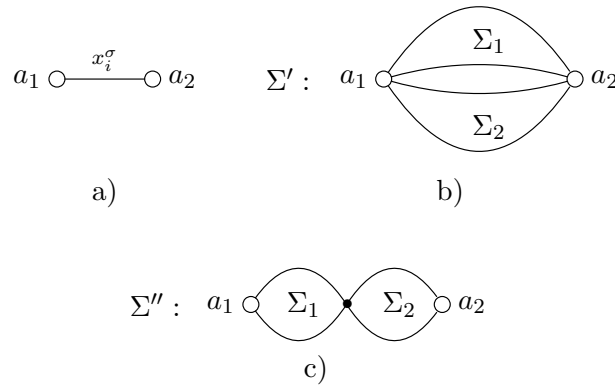


Рис. 4.6: к определению  $\pi$ -схемы

ению  $\pi$ -схемы  $\Sigma$ . Если  $\Sigma$  — простейшая  $\pi$ -схема вида  $x_i^\sigma$ , то положим  $\mathcal{F} = x_i^\sigma$ . Если  $\pi$ -схемам  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  уже сопоставлены формулы  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  с поднятыми отрицаниями, то  $\pi$ -схеме  $\Sigma'$  ( $\Sigma''$ ), получающейся в результате параллельного (соответственно последовательного) соединения  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , сопоставим формулу  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$  (соответственно  $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}_1 \& \mathcal{F}_2$ ). При этом

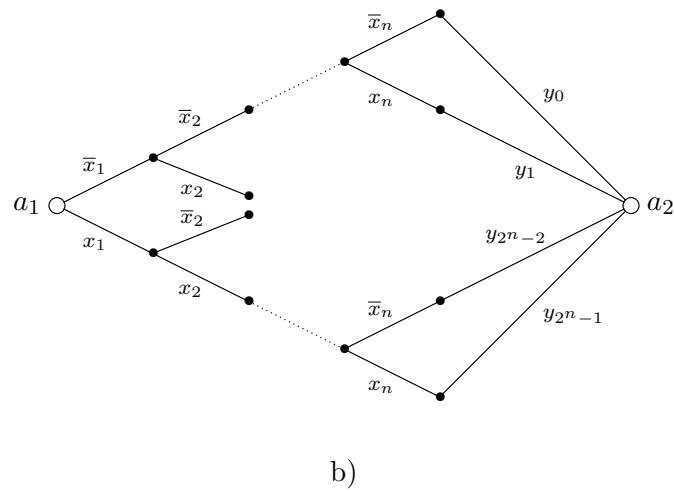
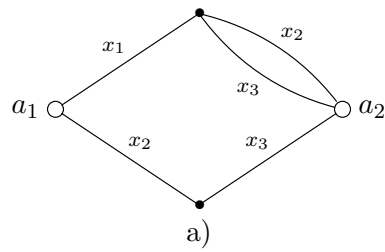
$$R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}'') = R(\mathcal{F}_1) + R(\mathcal{F}_2)$$

и, следовательно, по индуктивному предположению,

$$R(\mathcal{F}') = R(\mathcal{F}'') = L(\Sigma_1) + L(\Sigma_2) = L(\Sigma).$$

Аналогичным образом, индукцией по строению формулы  $\mathcal{F}$  с поднятыми отрицаниями можно найти эквивалентную ей  $\pi$ -схему  $\Sigma$  такую, что  $L(\Sigma) = R(\mathcal{F})$ .

Лемма доказана. □

Рис. 4.7: примеры  $\pi$ -схем



На рис. 4.7а показана  $\pi$ -схема, которая реализует ФАЛ  $H(x_1, x_2, x_3)$  и соответствует формуле:

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3,$$

а на рис. 4.7б —  $\pi$ -схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ  $\mu_n$  — мультиплексорную ФАЛ порядка  $n$ , — в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \mu_n(x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_{2^n-1}) = \\ = \bigvee_{\sigma_1 \in B} x_1^{\sigma_1} \left( \bigvee_{\sigma_2 \in B} x_2^{\sigma_2} \left( \dots \left( \bigvee_{\sigma_n \in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ  $f$ , называется *канонической КС* для этой ФАЛ.

Будем называть  $(1, m)$ -КС *приведенной*, если все изолированные вершины  $\Sigma$  являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины  $\Sigma$  принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы. При этом КС  $\widehat{\Sigma}$ , которая получается из КС  $\Sigma$  удалением «лишних», то есть не принадлежащих цепям указанного вида, неполосных вершин и контактов, является эквивалентной  $\Sigma$  приведенной КС такой, что  $L(\widehat{\Sigma}) \leq L(\Sigma)$ . Заметим, что приведенная КС не содержит петель, а приведенная КС, не реализующая нулевых ФАЛ, является связным графом. Так, КС, показанная на рис. 4.3с, не является приведенной, а соответствующая ей приведенная КС получается из нее удалением вершины  $v$ .

Рассмотрим теперь некоторые оценки числа контактных схем различных типов. Пусть  $\mathcal{U}^K$  и  $\mathcal{U}^\pi$  — множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех  $\pi$ -схем соответственно. Если  $\mathcal{U}^A$  — один из указанных классов схем, то через  $\mathcal{U}^A(L, n)$  будем обозначать множество приведенных  $(1, 1)$ -схем  $\Sigma$  из  $\mathcal{U}^A$  от БП  $X(n)$ , для которых  $L(\Sigma) \leq L$ . Для

любого множества схем  $\mathcal{U}$  в соответствии с §1 через  $|\mathcal{U}|$  и  $\|\mathcal{U}\|$  будем по-прежнему обозначать число попарно не изоморфных и попарно не эквивалентных схем в  $\mathcal{U}$  соответственно. При этом для любого из введенных выше множеств схем неравенство (1.7) будет выполняться.

**Лемма 4.2.** *При любых натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^\pi(L, n)\| \leq (12n)^L. \quad (4.2)$$

*Доказательство.* В силу леммы 4.1, достаточно доказать, что число попарно не эквивалентных формул  $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$  с поднятыми отрицаниями над базисом  $B_0$ , для которых  $R(\mathcal{F}) \leq L$ , не превосходит  $(12n)^L$ . Требуемая оценка вытекает из следствия к лемме 3.2.

Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 4.3.** *При любых натуральных  $L$  и  $n$  выполняется неравенство*

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq (8nL)^L.$$

*Доказательство.* Возьмем произвольную КС  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1; a_2)$ ,  $\Sigma \in \mathcal{U}^K(L, n)$ , и выделим в ней остовное дерево  $\mathcal{D}$  с корнем  $a_2$  так, чтобы в  $\mathcal{D}$  вошли все инцидентные  $a_2$  контакты  $\Sigma$ , а вершина  $a_1$  была листом  $\mathcal{D}$ . Пусть, далее,  $\mathcal{D}'$  — связанное с  $\mathcal{D}$  остовное наддерево КС  $\Sigma$ , которое получается путем присоединения каждого из не вошедших в  $\mathcal{D}$  ребер  $\Sigma$  к одной из своих концевых вершин, отличной от  $a_1$  (см. §1). Рассмотрим ориентированное упорядоченное дерево  $\mathcal{D}''$ , получающееся из  $\mathcal{D}'$  введением (условной) ориентации всех его ребер по направлению к корню и таким их упорядочением, при котором вершина  $a_1$  становится первым листом  $\mathcal{D}''$  (см. §1).

Заметим, что число ребер (вершин, листьев) дерева  $\mathcal{D}''$  не больше, чем  $L$  (соответственно  $L + 1$ ,  $L$ ), и поэтому, в

силу (1.4), число таких деревьев с учетом пометок их ребер символами  $x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  не больше, чем  $(8n)^L$ . Заметим также, что КС  $\Sigma$  может быть получена в результате присоединения каждого листа дерева  $\mathcal{D}''$  к одной из его вершин, отличной от  $a_2$ . Следовательно,

$$\|\mathcal{U}^K(L, n)\| \leq |\mathcal{U}^K(L, n)| \leq (8nL)^L.$$

Лемма доказана.  $\square$

Рассмотрим, в заключение, особенности функционирования КС с несколькими входами. Будем считать, что в каждой вершине  $(p, q)$ -КС  $\Sigma$  реализуется столбец, составленный из  $p$  ФАЛ проводимости от входов  $\Sigma$  к этой вершине, а сама КС  $\Sigma$  реализует матрицу, которая состоит из  $q$  столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$  представляет собой матрицу  $F = F(x_1, \dots, x_n)$  с  $p$  строками,  $q$  столбцами и элементами из  $P_2(n)$ , для которой  $F\langle i, j \rangle$  — ФАЛ, реализуемая между  $a'_i$  и  $a''_j$ , где  $i \in [1, p]$  и  $j \in [1, q]$ , то есть при любом  $\alpha$ ,  $\alpha \in B^n$ , матрица  $F(\alpha)$  является матрицей достижимости сети  $\Sigma|_\alpha$ . В частности, функционирование  $(1, q)$ -КС представляет собой набор (строку) из  $q$  ФАЛ проводимости от ее входа к выходам, а функционирование  $(p, 1)$ -КС — столбец из  $p$  ФАЛ проводимости от ее входов к выходу.

Так, КС  $\Sigma(x_1, x_2, x_3; a_1, v; a_2, a_3)$ , показанная на рисунке 4.3с реализует матрицу  $\begin{bmatrix} l_3 & \bar{l}_3 \\ \bar{l}_3 & l_3 \end{bmatrix}$  от БП  $X(3)$ , а на рис. 4.4б приведено  $(2^n, 1)$ -КД порядка  $n$  от БП  $X(n)$ , которое имеет вид  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_n; a_0, \dots, a_{2^n-1}; a)$  и реализует столбец из всех ЭК множества  $Q_n$ , упорядоченных сверху вниз по возрастанию их номеров.

В соответствии с общими правилами из §1, функционирование КС  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$  с

неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида  $\Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$ . В этом случае матрица  $F$  является рефлексивной и транзитивной матрицей, а если, кроме того,  $\Sigma$  — неориентированная сеть, то и — симметричной матрицей. Заметим также, что функционирование  $(1, 1)$ -КС из неориентированных контактов по существу не отличается от функционирования соответствующей двухполюсной КС с неразделенными полюсами.

В частности, показанная на рис. 4.3с КС с неразделенными полюсами  $a_1, a_2, a_3$  реализует матрицу  $\begin{bmatrix} 1 & l_3 & \bar{l}_3 \\ l_3 & 1 & 0 \\ \bar{l}_3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , КС из тождественных вершин реализует единичную матрицу, если каждая ее вершина является входом и выходом с одним и тем же номером и т. д.

С другой стороны, любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица  $F, F \in (P_2(n))^{m,m}$ , реализуется КС  $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ , которая представляет собой объединение всех КС  $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i, a_j)$ , где  $1 \leq i < j \leq m$ , а КС  $\Sigma_{ij}$  является  $\pi$ -схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ  $F \langle i, j \rangle$  и считается канонической КС матрицы  $F$ .

## Литература

- [1] *Алексеев В. Б.* Введение в теорию сложности алгоритмов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [2] *Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н.* Задачи по курсу «Основы кибернетики». Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002.
- [3] *Алексеев В. Б., Ложкин С. А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
- [4] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1976.
- [5] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. 3-е изд., перераб. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [6] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, под редакцией *С. В. Яблонского* и *О. Б. Лупанова*. Т. 1. М.: Наука, 1974.
- [7] *Евдокимов А. А.* О максимальной длине цепи в единичном  $n$ -мерном кубе // Матем. заметки. 1969. 6. №3. С. 309–319.
- [8] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1977.

- [9] *Журавлев Ю. И.* Локальные алгоритмы вычисления информации // Кибернетика. №1. 1965. С. 12–19.
- [10] *Журавлев Ю. И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 5–44.
- [11] *Кузьмин В. А.* Оценки сложности реализации функций алгебры логики простейшими видами бинарных программ // Сб. «Методы дискретного анализа в теории кодов и схем». Новосибирск, 1976. Вып. 29. С. 11–39
- [12] *Ложкин С. А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 189–214.
- [13] *Ложкин С. А.* Структурное моделирование и декомпозиция для некоторых классов схем. М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [14] *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [15] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики релейно-контактными схемами // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1964. С. 25–48.
- [16] *Лупанов О. Б.* О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960. С. 61–80.
- [17] *Мурога С.* Системы проектирования сверхбольших интегральных схем. М.: Мир, 1985.

- [18] *Нечипорук Э. И.* О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
- [19] *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
- [20] *Поваров Г. Н.* Метод синтеза вычислительных и управляющих контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18. №2. С. 145–162.
- [21] *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [22] *Сапоженко А. А.* Некоторые вопросы сложности алгоритмов. Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2001.
- [23] *Сапоженко А. А., Ложкин С. А.* Методы логического проектирования и оценки сложности схем на дополняющих МОП-транзисторах // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. №1. С. 42–47.
- [24] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 1. М.: Наука, 1968.
- [25] *Физтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, том 2. М.: Наука, 1964.
- [26] *Чегис И. А., Яблонский С. В.* Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН СССР. Т. 51. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360.
- [27] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1986.
- [28] *Яблонский С. В.* Надежность управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1991.

- 
- [29] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
- [30] Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.
- [31] Cardot C. Quelques resultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits a relais // Ann. Telecommunications. 1952. V.7. №2. P. 75–84.
- [32] Shannon C. E. The syntesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101).
- [33] Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams. SIAM Publishers, 2000.