Математическая логика

mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (318, 319/2, 241, 242)

Блок 45

Темпоральные логики

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич
E-mail:
valdus@yandex.ru

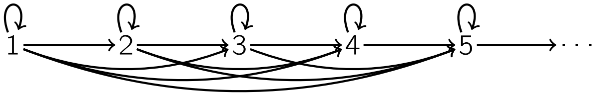
ВМК МГУ, 2025, февраль–май

Темпоральные логики

Темпоральная логика (логика времени) — это разновидность модальной логики, в которой $\Box$ и $\Diamond$ отвечают необходимости и возможности выполнимости формулы в условиях течения времени, обычно «всегда [в будущем]» и «иногда [в будущем]»

Шкалой Крипке темпоральной логики описывается течение времени: миры — это моменты времени, а отношением достижимости миров описывается порядок смены моментов времени

Пример: шкала дискретного линейного отсчёта времени



Пропозициональные переменные формул темпоральных логик — это атомарные высказывания, истинность которых может изменяться с течением времени

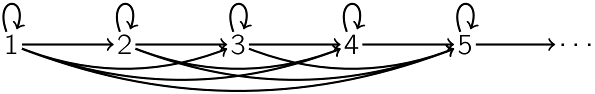
Темпоральные логики

Течение времени может истолковываться по-разному, и в зависимости от истолкования (*то есть точного вида рассматриваемых шкал*) могут получаться разные темпоральные логики, например:

- Логика линейного времени
  (**LTL**, **L**inear **T**emporal **L**ogic)
  - время дискретно линейно течёт вперёд
  - формула — это свойство линейного развития событий
- Логика деревьев вычислений, она же логика ветвящегося времени
  (**CTL**, **C**omputation **T**ree **L**ogic)
  - время — это частично упорядоченное множество, которым описываются все варианты развития событий
  - формула — это высказывание о возможности и невозможности заданного развития событий с учётом всех вариантов

Логика линейного времени (LTL)

Шкала LTL — это естественно упорядоченный натуральный ряд (моментов времени):



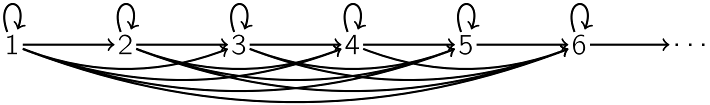
Интерпретация LTL — это модель Крипке, основанная на шкале LTL

Модальности $\Box$ и $\Diamond$ в LTL обычно обозначаются символами **G** (**G**lobally) и **F** (in **F**uture)

К ним могут добавляться и другие модальности, описывающие те или иные взаимосвязи между высказываниями в неуклонно текущем времени

Логика линейного времени (LTL)

Пример:



Логика линейного времени (LTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$ LTL
с оценкой атомарных высказываний, повторяющейся с периодом 4:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & \cdots \\ \emptyset & & \{q\} & & \{p\} & & \{p,q\} & & \emptyset & & \{q\} & & \end{array}$$

Справедливы следующие соотношения:

- в момент времени 1 неверно p и верно $p \to q$

$$\mathcal{I}, 1 \not\models p, \qquad \mathcal{I}, 1 \models p \to q$$

- p иногда бывает верным, но не всегда

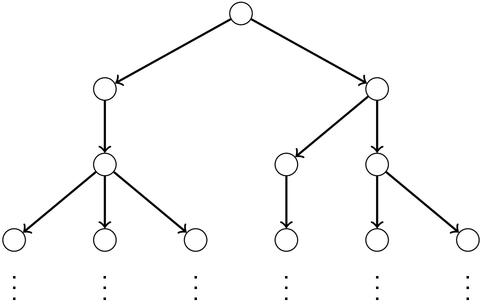
$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{F}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{G}p$$

- p бесконечно часто бывает верным,
  но нет такого момента, начиная с которого p всегда верно

$$\mathcal{I}, 1 \models \mathbf{GF}p, \qquad \mathcal{I}, 1 \not\models \mathbf{FG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Течение времени в CTL описывается ориентированным деревом, содержащим только бесконечные ветви:



Шкала CTL — это шкала Крипке,
являющаяся *рефлексивно-транзитивным замыканием* такого дерева:
миры — это вершины дерева,
а отношение переходов — это отношение достижимости миров в дереве

Интерпретация CTL — это модель Крипке, основанная на Шкале CTL

Логика деревьев вычислений (CTL)

В логике деревьев вычислений модальности $\Box$, $\Diamond$ записываются как **AG** (for **A**ll paths **G**) и **EF** (**E**xists path such that **F**)

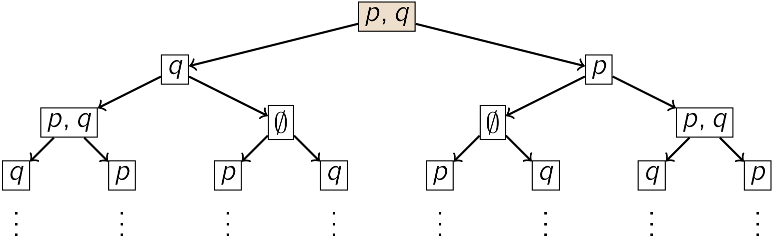
CTL содержит и другие модальности — например, **EG** и **AF**

Смысл этих модальностей определяется так:

- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{EG}\varphi \Leftrightarrow$ существует ветвь дерева, исходящая из v и такая что для каждой вершины w этой ветви верно $\mathcal{I}, w \models \varphi$
- $\mathcal{I}, v \models \mathbf{AF}\varphi \Leftrightarrow$ в каждой ветви дерева, исходящей из v, существует вершина w, такая что $\mathcal{I}, w \models \varphi$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$ CTL
(при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):

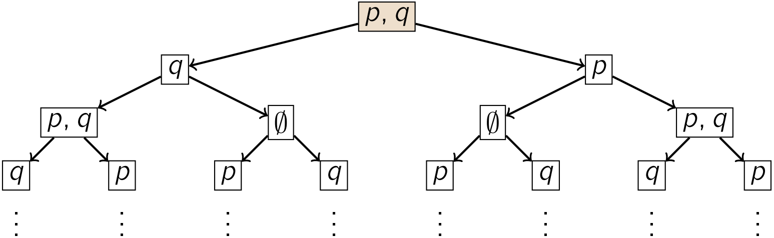


Справедливы следующие соотношения:

- в начале развития событий верно p,
  но события могут развиваться так, что p станет неверным
  $$\mathcal{I}, \square \models p, \qquad \mathcal{I}, \square \models \mathbf{EF}\neg p$$
- события могут развиваться так, чтобы p всегда оставалось верным,
  но могут развиваться и по-другому
  $$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{EG}p, \qquad \mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}p$$

Логика деревьев вычислений (CTL)

Пример: рассмотрим такую интерпретацию $\mathcal{I}$ CTL (при переходе влево изменяется значение p, вправо — значение q):



Справедливы следующие соотношения:

- как бы ни развивались события до сих пор, есть способ в дальнейшем сделать p и q одновременно верными

$$\mathcal{I}, \square \models \mathbf{AGEF}(p \,\&\, q)$$

- утверждение «после возникновения события p рано или поздно неотвратимо возникает событие q» неверно

$$\mathcal{I}, \square \not\models \mathbf{AG}(p \to \mathbf{AF}q)$$